JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XVI. — ANNÉE 1851.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55

1851

QA
1
J684
t.16

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat16liou

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XVI.

Pages.

Sur quelques propriétés des intégrales définies, déduites de la méthode des coordonnées elliptiques; par M. *William Roberts* 1

Sur un théorème de M. Chasles; par M. *J. Liouville* 6

Théorie nouvelle de la rotation des corps; par M. *Poinsot*. (Première et deuxième Parties.) 9

Sur la théorie générale des surfaces; par M. *J. Liouville* 130

Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques; par M. *J. Liouville* 133

Note sur une formule d'Abel; par M. *William Roberts* 143

Sur une question relative aux déterminants; par M. *Bazin* 145

Sur la théorie de la composition des formes quadratiques; par M. *Bazin* 161

Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes; par M. *G. Lamé* 171

Sur la convergence des séries trigonométriques procédant suivant les multiples d'un même arc; par M. *H. Holmgren* 186

Note sur quelques points de la théorie des surfaces; par M. *Ossian Bonnet* 191

Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure; par M. *J.-A. Serret* 193

Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant (Extrait d'une Lettre adressée à M. *Liouville*); par M. *V. Puiseux* 208

Mémoire sur le déterminant d'un système de fonctions; par M. *J. Bertrand* 212

Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques; par M. *V. Puiseux* 228

Mémoire sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation; par M. *J. Liouville* 241

Sur des équations différentielles qui se rattachent à l'équation de Riccati; par M. *E. Brassinne* 255

Pages

Sur les formes quadratiques; par M. *P. Tchebichef*. 257

Théorème relatif à une classe d'équations différentielles simultanées, analogue à un théorème employé par Lagrange dans la théorie des perturbations; par M. *E. Brassinne*. 283

Théorie nouvelle de la rotation des corps; par M. *Poinsot*. (Troisième et dernière Partie.). 289

Note sur différentes séries; par M. *Tchebichef*. 337

Nouvelle étude sur la théorie des forces; par M. *P. Saint-Guilhem*. 347

Nouvelle démonstration d'un théorème de Legendre; par M. *Ant. Winckler*. . . 375

Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers; par M. *E.-E. Kummer*. 377

Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure; par M. *J.-A. Serret*. . . 499

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
13.	14.	*au lieu de* de droite à gauche. *lisez* de gauche à droite
228.	6.	*au lieu de* $\int_c u_1 dz$, *lisez* $\int_c^h u_1 dz$
228.	13.	*au lieu de* correpondant, *lisez* correspondant
251.	3.	*au lieu de* le moment, *lisez* le carre du moment
391,	19.	*au lieu de* membre. *lisez* terme.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DÉFINIES,

DÉDUITES DE LA MÉTHODE DES COORDONNÉES ELLIPTIQUES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

On sait que la méthode employée ordinairement pour obtenir la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

consiste à transformer l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy,$$

en faisant

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega,$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega,$$

d'où l'on déduit

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{1}{4}\pi.$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Maintenant, supposons qu'au lieu de transformer x et y dans les coordonnées polaires, on fasse usage des coordonnées elliptiques, c'est-à-dire des variables μ et ν, données par les équations suivantes :

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1,$$

b étant une quantité constante. Cela nous donne, comme on sait,

$$x^2 + y^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2$$

et

$$dx\,dy = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}},$$

en sorte qu'on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_b^\infty \int_0^b \frac{e^{-(\mu^2+\nu^2-b^2)}(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}},$$

ce qui donne, en écrivant la lettre u au lieu de μ et ν,

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{u^2-b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{b^2-u^2}} - \int_b^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{u^2-b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2}\,u^2\,du}{\sqrt{b^2-u^2}}.$$

Faisons dans cette formule $b = 1$, et transformons les intégrales

$$\int_1^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{u^2-1}}, \quad \int_1^\infty \frac{e^{-u^2}\,u^2\,du}{\sqrt{u^2-1}},$$

en posant

$$v = \sqrt{u^2 - 1}$$

transformons aussi les intégrales

$$\int_0^1 \frac{e^{-u^2}\,du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \int_0^1 \frac{e^{-u^2}\,u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

en faisant

$$u = \sqrt{v},$$

et nous aurons

$$z = \int_0^\infty e^{-v} \sqrt{\frac{1+v}{v}}\, dv \cdot \int_0^1 \frac{e^{-v}\, dv}{\sqrt{v(1-v)}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-v}\, dv}{\sqrt{v(1+v)}} \cdot \int_0^1 e^{-v} \sqrt{\frac{v}{1-v}}\, dv.$$

Il est bon de remarquer que la formule qu'on vient d'obtenir n'est qu'un cas particulier d'un résultat donné par Abel, et qui se trouve dans ses Œuvres, publiées par Holmboë, tome Ier, page 100. Il suffira de faire, dans le théorème d'Abel dont il s'agit,

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a = 1.$$

Voilà donc une nouvelle application des coordonnées elliptiques, et qui sert encore à montrer avec quelle simplicité ce système merveilleux conduit à des résultats qui sont assez difficiles à obtenir par d'autres moyens.

Si notre formule n'a pas le même degré de généralité que celle d'Abel, on ne doit pas oublier, d'autre part, que la méthode que nous avons employée jouit de l'avantage de s'étendre à des cas entièrement nouveaux, en considérant les coordonnées elliptiques à trois dimensions, et les transformations analytiques analogues qui répondent à un nombre quelconque de variables.

En effet, transformons l'intégrale définie triple

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)}\, dx\, dy\, dz,$$

en employant les variables ρ, μ, ν données par les équations suivantes :

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1.$$

b et c étant des quantités constantes. On aura donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2$$

$$dx\,dy\,dz = \frac{\rho^2 - \mu^2 \quad \mu^2 - \nu^2}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}\,\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - \nu^2}}\,d\rho\,d\mu\,d\nu.$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\quad} \quad dx\,dy\,dz = \left(\int_0^\infty e^{\quad} dx\right)^3 = \frac{1}{8}\pi$$

$$= \int_0^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{e^{\quad} \quad \rho^2 - \mu^2 \quad \mu^2 - \nu^2}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\,\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}\,\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - \nu^2}}\,d\rho\,d\mu\,d\nu.$$

Développant cette expression et écrivant la lettre u au lieu des trois lettres ρ, μ, ν, nous trouverons la formule suivante :

$$\frac{1}{8}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-b^2 - c^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{u^2 - b^2}\,\sqrt{u^2 - c^2}} \cdot \int_c^\infty \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{u^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{b^2 - u^2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{u^2 - b^2}\,\sqrt{u^2 - c^2}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{u^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{b^2 - u^2}}$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{u^2 - b^2}\,\sqrt{u^2 - c^2}} \cdot \int_0^c \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{u^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{b^2 - u^2}}$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{u^2 - b^2}\,\sqrt{u^2 - c^2}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{u^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{b^2 - u^2}}$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{u^2 - b^2}\,\sqrt{u^2 - c^2}} \cdot \int_b^c \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{u^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{b^2 - u^2}}$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{u^2 - b^2}\,\sqrt{u^2 - c^2}} \cdot \int_0^c \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{u^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-u^2} u^2\,du}{\sqrt{c^2 - u^2}\,\sqrt{b^2 - u^2}}.$$

Il serait superflu d'insister sur la relation qui existe entre cette formule, qui me semble assez curieuse, et la théorie des transcendantes elliptiques et des inverses de ces fonctions. Considérée sous ce rapport, elle peut être présentée sous une forme expressive, que je me dispense de transcrire. Je me contente de l'avoir indiquée.

Quant à la formule générale qui résulte du changement des variables dans l'intégrale définie multiple

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2+\ldots+t^2)}\, dx\, dy\, dz \ldots dt,$$

par des substitutions analogues à celles que nous venons d'employer, il suffira de rappeler à l'attention de nos lecteurs les divers Mémoires publiés dans le Journal de M. Crelle par MM. Jacobi et Hœdenkamp, et par d'autres géomètres qui ont traité le sujet de ces transformations, ainsi que les travaux récents de M. Liouville, qui ont paru dans son Journal. On y trouvera tous les détails nécessaires pour obtenir la formule dont il s'agit.

Dublin, le 29 Janvier 1851

SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES;

PAR J. LIOUVILLE.

Le théorème dont il s'agit consiste en ce que deux surfaces du second degré homofocales données (α), (β) peuvent être considérées comme les lieux des centres de courbure d'une certaine surface (Θ), qui toutefois deviendrait imaginaire si l'on prenait pour (α), (β) deux ellipsoïdes ou deux hyperboloïdes à deux nappes. Je veux ici compléter ce théorème en ajoutant l'équation de la surface (Θ), ou plutôt des surfaces en nombre infini (parallèles entre elles) dont les centres de courbure ont (α) et (β) pour lieux géométriques.

Considérons les diverses surfaces du second degré homofocales à (α), (β); et désignons-les, suivant l'usage, par (ρ), (μ), (ν). Les surfaces données (α), (β) font partie des surfaces (ρ), (μ), (ν), dont l'équation en coordonnées rectangulaires est, comme on sait, de la forme

$$\frac{x^2}{a^2-\rho^2}+\frac{y^2}{b^2-\rho^2}+\frac{z^2}{c^2-\rho^2}=1,$$

a, b, c étant des constantes. On suppose $\rho^2>c^2>b^2$, μ^2 entre b^2 et c^2, $\nu^2<b^2$; pour fixer les idées, j'admets en outre que $\alpha^2>\beta^2$. Maintenant soit $\Theta(\rho,\mu,\nu)$ l'intégrale de la formule différentielle suivante :

$$d\Theta=d\rho\,\frac{\sqrt{(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)}}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}+d\mu\,\frac{\sqrt{(\mu^2-\alpha^2)(\mu^2-\beta^2)}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}}+d\nu\,\frac{\sqrt{(\alpha^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

L'équation générale des surfaces qui ont (α) et (β) pour lieux des centres de courbure sera

$$\Theta(\rho,\mu,\nu)=\text{constante}.$$

L'équation

$$d\Theta = 0$$

détermine, pour ainsi dire, la direction des surfaces (Θ), ou plutôt de leurs plans tangents, en chaque point de l'espace. A cause de l'ambiguïté des signes des radicaux, il y a donc, en général, pour chaque point, quatre plans tangents de ces surfaces, respectivement perpendiculaires, bien entendu, aux quatre tangentes communes à (α), (β), que l'on peut mener par ce point.

En donnant au second membre de l'équation

$$\Theta(\rho, \mu, \nu) = \text{constante}$$

deux valeurs particulières C, C′, on aura deux surfaces dont toutes les normales seront communes, et la différence constante C — C′ exprimera partout la distance de ces deux surfaces.

Si A et B sont deux constantes, les équations

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = A, \quad \frac{d\Theta}{d\beta} = B$$

sont celles d'une droite quelconque normale à la surface (Θ), et aussi d'une droite quelconque tangente à la fois aux deux surfaces (α), (β). Chacune de ces équations, prise isolément, représente d'ailleurs une surface développable formée par les normales à la surface (Θ) le long d'une de ses lignes de courbure. De là résultent deux systèmes de surfaces développables, qui appartiennent respectivement aux deux espèces de lignes de courbure de (Θ). Je n'ai pas besoin d'ajouter que les surfaces de systèmes différents sont à angle droit entre elles comme avec la surface (Θ). La surface représentée par l'équation

$$\frac{d\Theta}{d\beta} = B$$

touche et enveloppe la surface (β); elle est, au contraire, normale à la surface (α), sur laquelle elle engendre par son intersection une ligne géodésique, conformément à un théorème bien connu. De même, la surface représentée par

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = A$$

touche la surface (α), et coupe la surface (β) à angle droit, suivant une ligne géodésique de (β).

Quelle que soit la fonction F, l'équation

$$F\left(\frac{d\Theta}{d\alpha}, \frac{d\Theta}{d\beta}\right) = 0$$

représente une surface formée de droites normales aux surfaces (Θ); mais les deux cas cités plus haut sont naturellement les seuls où la surface soit développable.

Tous ces résultats dérivent sans peine des formules que j'ai données au tome XII du présent Journal, en m'occupant du mouvement d'un point matériel. Mais on peut aussi les démontrer directement d'une manière très-simple, et par là donner plus d'élégance encore à la théorie des lignes géodésiques des surfaces du second degré. C'est ce que je ferai voir dans un autre article.

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION DES CORPS,

PAR M. POINSOT.

Voici une des questions qui m'ont le plus souvent occupé, et, si l'on me permet de parler ainsi, une des choses que j'ai le plus désiré de savoir en Dynamique.

Tout le monde se fait une idée claire du mouvement d'un *point*, c'est-à-dire du mouvement d'un corpuscule qu'on suppose infiniment petit, et qu'on réduit en quelque sorte par la pensée à un point mathématique. Car il ne reste plus alors qu'à se représenter la ligne, droite ou courbe, que ce point peut décrire, et la vitesse avec laquelle il se meut suivant cette ligne. Mais, s'il s'agit du mouvement d'un corps *de grandeur sensible et de figure quelconque*, il faut convenir qu'on ne s'en fait qu'une idée très-obscure.

A la vérité, cette idée paraît d'abord s'éclaircir ou se résoudre naturellement en deux autres. Car, si l'on s'attache à regarder un seul et même point du corps, on peut suivre, d'un côté, le mouvement de ce point qui ne peut décrire qu'une certaine ligne dans l'espace, et, de l'autre côté, le mouvement du corps qui ne peut que tourner en même temps sur ce point, comme autour d'un centre fixe. Mais ce second mouvement, c'est-à-dire celui d'un corps mobile autour d'un point, sur lequel il a la liberté de pirouetter dans tous les sens, ne présente lui-même qu'une idée très-obscure.

Ce n'est pas qu'en rapportant les points du corps à des plans ou objets fixes dans l'espace, on n'ait su trouver ce qu'on appelle les *équations différentielles* de ce mouvement, et même qu'on ne soit

venu à bout d'*intégrer* ces équations, ou du moins d'en ramener les intégrales aux *quadratures*, dans le cas simple d'un corps libre de toute action étrangère. Euler et d'Alembert, à peu près dans le même temps, et par des méthodes différentes, ont les premiers résolu cette importante et difficile question de la Mécanique; et l'on sait que depuis, l'illustre Lagrange a repris de nouveau ce fameux problème, pour l'approfondir et le développer à sa manière, je veux dire par une suite de formules et de transformations analytiques qui présentent beaucoup d'ordre et de symétrie. Mais il faut convenir que, dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs, sans aucune image nette de la rotation du corps. On peut bien, par ces calculs plus ou moins longs et compliqués, parvenir à déterminer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps donné; mais on ne voit point du tout comment le corps y arrive: on le perd entierement de vue; tandis qu'on voudrait l'observer et le suivre, pour ainsi dire, des yeux dans tout le cours de sa rotation.

Or c'est cette idée claire du mouvement de rotation que j'ai tâché de découvrir, afin de mettre sous les yeux ce que personne ne s'était encore représenté.

Il en résulte une solution toute nouvelle du problème de la rotation d'un corps abandonné à lui-même, soit qu'il tourne librement sur son centre de gravité, ou sur tout autre point fixe autour duquel il serait forcé de se mouvoir: véritable solution du problème, en ce qu'elle fait image, et qu'on y voit le mouvement du corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point. Et si, de cette démonstration géométrique de la rotation des corps, on veut passer au calcul, pour mesurer toutes les différentes propriétés ou affections de ce mouvement, on n'a plus que des formules directes et toujours claires, parce que chacune d'elles n'y est que l'expression d'un théorème dynamique dont on a l'idée, et qui tend à son objet. Ainsi, notre analyse présente encore cet avantage, que tout s'y exprime et s'y développe par les seules données immédiates du problème, sans aucun mélange de ces angles ou de ces coordonnées étrangères qui ne tiennent point à la nature de la question, et qui ne viennent que de la méthode indirecte qu'on emploie pour la résoudre. Car c'est une remarque que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques: ces quan-

tités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrége et se simplifie sitôt qu'on se place au vrai point de vue.

J'ai donc pensé qu'une solution si simple, et si propre à jeter un nouveau jour sur les questions les plus difficiles de la Dynamique, pouvait servir à l'avancement réel de la science, et méritait ainsi l'attention des géomètres; et c'est cette considération philosophique qui m'a surtout déterminé à composer le nouvel ouvrage qu'on va lire, et dont j'ai présenté l'analyse à l'Académie [*].

Je le divise en trois parties : dans la première, après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, je cherche les forces qui seraient capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la Dynamique; dans la deuxième partie, je donne la solution du problème de la rotation des corps libres; et, dans la troisième, je développe les calculs qui se rapportent à cette solution.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT DES CORPS CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME.

I.

Idée de la rotation simple et de la vitesse angulaire.

1. Le seul mouvement de rotation dont nous ayons une idée claire est celui d'un corps qui tourne sur un axe *immobile*, ou dont la direction reste la même et dans le corps et dans l'espace. Car on voit

[*] Séance du 19 mai 1834.

clairement tous les différents cercles que les points du corps décrivent dans des plans perpendiculaires à cet axe : et il est évident que tous ces mouvements simultanés sont possibles, je veux dire qu'ils peuvent s'exécuter ensemble sans que la disposition mutuelle des points, ou ce qu'on peut nommer la *figure* du corps, en soit en rien changée.

2. Nous avons également une idée nette de la quantité ou de la mesure de cette rotation. Car, comme tous les points décrivent en même temps des arcs de cercle semblables, c'est-à-dire de longueurs proportionnelles à leurs rayons, le rapport de la vitesse d'un point au rayon du cercle qu'il décrit est le même pour tous les points du corps; et c'est ce rapport constant qui fait la mesure, ou ce qu'on nomme la *vitesse angulaire,* de la rotation. Cette vitesse angulaire n'est donc autre chose que la vitesse absolue d'un point quelconque du corps pris à l'unité de distance de l'axe de rotation : de sorte que, en nommant θ cette vitesse, on a θr pour la vitesse d'un point pris à la distance r du même axe.

II.

Composition des mouvements de rotation.

3. On peut voir avec la même clarté que de semblables rotations, que des causes quelconques tendraient à imprimer à un corps autour de différents axes passant par un même point, se composent exactement par la même loi que de simples forces appliquées en ce point. C'est ce que la théorie des *couples* rend manifeste en considérant plusieurs couples appliqués sur une *sphère homogène.* Car il est évident, par la régularité parfaite du corps, que chaque couple, s'il agissait seul, ferait tourner la sphère sur le diamètre perpendiculaire au plan de ce couple, et, par conséquent, sur l'axe du couple lui-même, et avec une vitesse angulaire proportionnelle à son *moment;* que, par conséquent, si tous les couples agissent à la fois, comme leur effet est le même que celui du couple résultant, la sphère doit tourner sur l'axe de ce couple avec une vitesse angulaire proportionnelle à son moment. D'où l'on voit que les mouvements de rotation se com-

posent et se décomposent exactement par les mêmes lois que les couples, et partant que les simples forces.

4. Mais cette composition des mouvements de rotation, il faut ici la démontrer par la simple géométrie; puisque, dans ces premiers principes, on ne s'occupe que du mouvement des corps considéré en lui-même, c'est-à-dire abstraction faite des forces qui le produisent, et de la nature du corps qui le reçoit. Mais pour avoir ici des expressions aussi claires que dans la théorie des couples, nous représenterons de même les rotations par de simples lignes terminées Op, Oq, etc., prises sur leurs axes; et chacune de ces lignes, telle que Op, représentera à la fois l'*axe* et la *grandeur* de cette rotation p, et en indiquera encore le *sens* par cette convention qu'en se plaçant à l'extrémité p considérée comme le nord, pour regarder devant soi le point O considéré comme le midi, la rotation se fera de droite à gauche, comme se fait, à nos yeux, le mouvement du soleil. FIG. 1.

III.

Parallélogramme des rotations.

5. *Si, par deux causes quelconques, un corps tend à la fois à prendre deux rotations p et q, représentées par les deux côtés* Op, Oq *d'un parallélogramme* O$p\theta q$, *le corps prendra une rotation unique θ représentée par la diagonale* Oθ *de ce parallélogramme.* FIG. 2.

En effet, considérez un point quelconque m du corps, pris dans le plan du parallélogramme, et, par exemple, vers la droite dans le supplément de l'angle que font entre eux les deux côtés; et nommons x et y les deux perpendiculaires abaissées de ce point m sur ces côtés. Il est clair que, par la seule rotation p, le point m tend à s'élever au-dessus du plan avec une vitesse px (n° **2**); et que, par la seule rotation q, il tend à s'élever avec une vitesse qy, et qu'ainsi, en vertu des deux causes agissant à la fois, il a, suivant la normale, la vitesse $px + qy$. Or, en nommant h la perpendiculaire abaissée du point m sur la diagonale θ, on a toujours l'équation

$$px + qy = \theta h,$$

comme on le sait par un théorème très-connu de géométrie. Donc la

vitesse que prend le point m est égale à θh, c'est-à-dire à la vitesse qu'il aurait si le corps tournait sur la diagonale avec la vitesse angulaire θ. Et comme la même chose peut se dire de tout autre point du plan, et que le mouvement du plan entraîne celui du corps, on peut dire qu'un point quelconque du corps prend, par les deux rotations p et q, le même mouvement qu'il prendrait par la seule rotation θ. Donc, etc.

Remarque.

FIG. 3. C'est uniquement pour abréger la démonstration que j'ai pris le point m dans le supplément de l'angle que font entre eux les deux côtés du parallélogramme. Si ce point était pris entre les côtés mêmes, on trouverait que s'il s'élève au-dessus du plan avec la vitesse px, il s'abaisse au-dessous avec la vitesse qy : de sorte que sa vitesse suivant la normale serait la différence $px - qy$. Mais, par le même théorème de géométrie, on aurait alors

$$px - qy = \delta h;$$

c'est-à-dire que le point a toujours la même vitesse θh que si le corps tournait sur la diagonale.

6. Au reste, ceci nous donne l'idée d'un théorème de géométrie plus général que le précédent, et dont celui-ci n'est en quelque sorte qu'un cas particulier.

FIG. 4. Car, supposez le point m pris où l'on voudra dans l'espace, et nommez de même x, y et h les trois perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés p et q, et la diagonale δ du parallélogramme $pOq\delta$: vous aurez de même px, qy et δh pour les vitesses que les trois rotations p, q et θ tendraient à imprimer au point m. Mais ici ces vitesses, au lieu d'être dans la même direction, seraient respectivement perpendiculaires aux plans des trois triangles mOp, mOq, $mO\theta$: les lignes qui les représentent font donc entre elles les mêmes angles que les plans de ces triangles; et elles sont d'ailleurs proportionnelles à leurs aires respectives.

Or, puisque le point m, en vertu des deux rotations p et q, doit se mouvoir comme il le ferait en vertu de la simple rotation θ, il s'en-

suit que la ligne θh doit être la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres px et qy.

On a donc ce théorème de géométrie :

Si, d'un point quelconque m de l'espace, comme sommet, on mène trois triangles qui aient pour bases les deux côtés Op, Oq *et la diagonale* Oθ *d'un parallélogramme, il y a toujours entre les aires de ces trois triangles la même relation qu'entre les côtés et la diagonale d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles de ces trois plans.*

Ainsi les deux premiers triangles se composent en quelque sorte pour former le troisième, comme se composeraient entre elles, pour former leur résultante, deux forces proportionnelles aux aires de ces triangles, et qui auraient entre elles la même inclinaison.

7. Et maintenant remarquez que ce théorème, tiré de considérations dynamiques, se voit sur-le-champ par la géométrie. Car, au lieu des trois triangles, considérez les trois parallélogrammes ou rhombes faits sur le même côté Om, appuyés sur les même bases Op, Oq, Oθ, et dont les aires sont mesurées par px, qy, θh. Il est évident que ces rhombes, qui forment les deux plans adjacents avec le plan diagonal d'un même rhomboïde, étant vus comme appuyés sur la commune base Om, sont entre eux comme leurs hauteurs, et, par conséquent, comme les trois lignes qui résulteraient de l'intersection du rhomboïde par un plan perpendiculaire à l'arête Om. Or ces lignes forment évidemment les deux côtés et la diagonale d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles des trois plans. Donc, etc.

Actuellement, si l'on imagine que le point m descende de l'espace, perpendiculairement au plan du parallélogramme, et pour tomber dans le supplément de l'angle pOq des deux côtés, ou de son opposé au sommet, il est visible que l'inclinaison mutuelle des deux triangles mOp, mOq va en diminuant, et devient enfin nulle; et alors le triangle mOθ construit sur la diagonale devient égal à la somme des deux autres, comme la diagonale d'un parallélogramme devient égale à la somme des deux côtés qui la comprennent, quand l'inclinaison de ces côtés devient nulle.

Si le point m descend de même pour tomber dans l'angle même

pOq, ou dans son opposé au sommet, il est visible que l'inclinaison mutuelle des deux triangles mOp, mOq va en augmentant et devient enfin égale à deux angles droits : et alors le triangle $mO\theta$ construit sur la diagonale devient égal à la *différence* des deux autres ; comme la diagonale d'un parallélogramme devient égale à la *différence* des deux côtés quand leur inclinaison mutuelle devient égale à deux angles droits.

Ainsi ce théorème très-connu, que Lagrange attribue à Varignon, et qu'il regarde comme un beau théorème de géométrie, n'est qu'un cas particulier du nôtre : et comme celui-ci est très-facile à démontrer *directement*, on en peut tirer réciproquement une démonstration du *parallélogramme des rotations*, encore plus nette que la première, puisqu'on y prend où l'on veut le point m dont on examine le mouvement, sans avoir besoin de supposer que ce point est situé dans le plan des axes des deux rotations composantes.

COROLLAIRE.

8. De ce *parallélogramme* des rotations il est clair qu'on peut s'élever à la composition de tant de rotations qu'on voudra, Op, Oq, Or, etc., et parvenir ainsi à leur résultante générale $O\theta$ en les composant successivement deux à deux, à la manière des simples forces appliquées sur un point.

Et cette similitude de composition n'est pas bornée à des rotations sur différents axes qui se croisent en un même point ; mais, ce qui est très-digne de remarque, elle s'étend à des rotations autour d'axes qui seraient situés d'une manière quelconque dans l'espace : théorie neuve qui mérite d'être développée.

IV.

Composition de deux rotations autour de deux axes parallèles.

9. *Deux rotations p et q, de même sens, autour de deux axes parallèles, se composent en une seule θ égale à leur somme $p+q$, autour d'un axe parallèle aux deux premiers et qui divise leur distance*

mutuelle dans la raison inverse des deux rotations composantes p et q.

Soient, en effet, Ap et Bq les deux lignes parallèles qui, menées des points A et B d'un même côté de l'espace, représentent les deux rotations de même sens p et q dont il s'agit, et considérons un point quelconque m pris hors de ces axes parallèles, mais dans leur plan, vers la droite. Si l'on nomme x et y les deux perpendiculaires abaissées de ce point m sur les lignes Ap et Bq, il est clair que, par la rotation p, le point m tend à s'élever au-dessus du plan avec la vitesse px, et que, par la rotation q, il tend à s'élever avec la vitesse qy; et qu'ainsi, par les deux rotations à la fois, il a, suivant la normale, la vitesse $px + qy$. Or, qu'on mène entre Ap et Bq la parallèle Cθ, si l'on nomme h la perpendiculaire abaissée sur elle du point m, on aura $x - h$ pour sa distance à la parallèle Ap, et $h - y$ pour sa distance à la parallèle Aq. Si donc on suppose Cθ menée telle que les deux distances soient en raison inverse de p à q, on aura Fig. 5

$$x - h : h - y :: q : p \quad \text{ou} \quad px + qy = (p + q).h.$$

Or $(p + q)h$ exprime la vitesse que prendrait le point m par une rotation unique $\theta = p + q$, autour de l'axe Cθ.

Donc, en vertu des deux rotations parallèles et de même sens p et q, le mouvement d'un point quelconque du plan, et, par conséquent, le mouvement du corps, est le même que si le corps tournait simplement avec une vitesse angulaire θ égale à $p + q$, sur un axe parallèle qui divise la distance mutuelle des deux premiers en raison inverse des deux rotations composantes p et q.

10. Si les deux rotations parallèles p et q étaient de *sens contraires*, on verrait de même qu'elles se composent en une seule θ égale à leur différence $p - q$, et autour d'un axe parallèle Cθ dont on trouverait la position comme on trouverait celle de la résultante de deux forces parallèles et contraires p et q. Ainsi, en nommant i la distance de Cθ au premier axe Ap, par exemple, et D la distance mutuelle de Ap et Aq, on aurait Fig. 6.

$$i = \mathrm{D} \cdot \frac{q}{p - q}.$$

FIG. 7. **11.** Si p et q différaient très-peu l'une de l'autre, la rotation résultante $\theta = p - q$ serait très-petite; et la distance i de son axe au premier Ap serait très-grande; de sorte que si p et q deviennent parfaitement égales, on trouve une rotation θ *nulle*, autour d'un axe situé à une distance *infinie* : ce qui n'apprend plus rien, ou plutôt ce qui nous avertit que, dans ce cas singulier, il n'y a plus, à proprement parler, de rotation résultante, et que le mouvement du corps doit changer de nature. C'est, en effet, ce qui arrive; car on va voir que, de ces deux rotations parallèles, égales et contraires, il ne peut résulter pour le corps qu'un *pur mouvement de translation* dans l'espace.

V.

Des couples de rotations.

FIG. 8. **12.** Deux rotations p et $-p$, égales et de sens contraires, autour de deux axes parallèles, forment ensemble ce que j'appelle un *couple de rotations* : on peut voir à priori qu'un tel couple est irréductible, ou qu'il forme, pour ainsi dire, une rotation *sui generis*, qui ne peut jamais être ramenée à une rotation *simple* autour d'aucun axe quel qu'il soit.

Le mouvement qui résulte d'un couple de rotations p et $-p$ est une pure translation de tous les points du corps suivant des lignes perpendiculaires au plan de ce couple, et avec une commune vitesse mesurée par le moment *du couple, c'est-à-dire par le produit* pD *de l'une p des deux rotations, multipliée par la distance* D *qui sépare leurs axes parallèles.*

Et, en effet, considérez un point quelconque m du corps, pris dans le plan de ce couple, à la distance x du premier axe p, et, par conséquent, à la distance $x - \mathrm{D}$ du second $-p$. Par la rotation p, le point m s'élève suivant la perpendiculaire au plan avec la vitesse px; par la rotation $-p$, il s'abaisse en sens contraire avec la vitesse $p(x - \mathrm{D})$: de sorte qu'il a, suivant la normale, la vitesse $px - p(x - \mathrm{D}) = p\mathrm{D}$. Donc, comme x n'entre plus dans cette expression, tous les points du plan, et, par conséquent, tous ceux

du corps ont la même vitesse pD suivant la perpendiculaire au plan du couple. Donc, etc.

13. On voit par là qu'un couple de rotations peut être tourné et transporté comme on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, sans que le mouvement du corps en soit changé; et de plus, que ce couple peut être transformé en un autre composé de nouvelles rotations p' et $-p'$, avec un nouveau bras D', pourvu que le moment $p'D'$ soit égal au premier pD.

14. De cette propriété et du *parallélogramme* des rotations simples, on peut conclure sur-le-champ que des couples de *rotations*, situés comme on voudra dans des plans quelconques, peuvent toujours se composer en un seul par la même loi que les couples de forces, et, par conséquent, comme de simples forces agissant sur un point : qu'en un mot, on peut appliquer à ces nouveaux couples, et sans en rien excepter, tous les théorèmes qui concernent les couples ordinaires.

15. C'est, d'ailleurs, ce qu'on verrait sous un nouveau jour, si l'on voulait considérer la cause capable de donner au corps le même mouvement qui résulte d'un couple de rotations. Car, comme ce mouvement n'est qu'une pure translation dans l'espace, il est clair qu'on pourrait le produire par une simple force qu'on appliquerait au centre de gravité du corps, dans une direction perpendiculaire au plan du couple, et en prenant cette force égale au produit du moment de ce couple par la masse entière du corps dont il s'agit. Tous les couples de rotations pourraient donc être ainsi remplacés par autant de forces proportionnelles appliquées au centre de gravité du corps. D'où résulte, pour ces couples, une composition exactement la même que celle des forces autour d'un point. Mais dans cette théorie du mouvement considéré en lui-même, il faut tout tirer de la géométrie, sans rien emprunter à la Dynamique.

VI.

Composition générale des rotations autour d'axes situés comme on voudra dans l'espace.

16. Considérons d'abord une simple rotation p, autour d'un

axe Ap passant par un point quelconque A du corps. Si, en un autre point O, pris où l'on voudra, on imagine deux rotations contraires p' et $-p'$, égales et parallèles à la première p, il est clair que ces deux rotations se détruisent d'elles-mêmes, et que le mouvement du corps n'est pas changé. Mais alors, au lieu de la simple rotation proposée p, on peut voir : 1° une rotation p' égale, parallèle et de même sens, mais dont l'axe passe en O; 2° un couple $(p, -p')$ formé des deux rotations parallèles restantes p et $-p'$. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs dans un plan quelconque parallèle au sien, ce qui est permis, il ne restera, au point O, que la rotation p', laquelle n'est, pour ainsi dire, que la rotation proposée p qu'on y aurait transportée parallèlement à elle-même.

On peut donc dire qu'une rotation peut être transportée parallèlement à elle-même en un point quelconque de l'espace, pourvu que l'on considère le couple de rotations qui naît de ce déplacement, et qui a pour *moment* ou pour mesure le produit de la rotation proposée par le chemin que son axe a parcouru.

17. Cela posé, soient tant de rotations qu'on voudra p, q, r, etc., autour d'axes Ap, Bq, Cr, etc., situés d'une manière quelconque dans l'espace; si on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque O de l'espace, elles viendront s'y composer en une seule θ, qu'on peut nommer la *rotation résultante;* et tous les couples de rotations qu'elles ont produits dans leur translation se composeront en un seul $(\rho, -\rho)$ qu'on peut nommer le couple *résultant*. Réduction générale exactement la même que celle des forces, et d'où l'on peut tirer une théorie toute semblable.

Ainsi, comme tant de forces que l'on voudra sont toujours réductibles à une seule force passant par un point quelconque donné, et à un seul couple de deux forces égales, parallèles et contraires; de même tant de rotations qu'on voudra, autour de différents axes situés d'une manière quelconque dans l'espace, sont toujours réductibles à une seule rotation autour d'un axe passant par un point pris à volonté, et à un seul couple de deux rotations égales et contraires, autour de deux axes parallèles entre eux.

Et il est évident, comme dans la théorie des forces, que la rotation

résultante θ sera toujours la même en quelque lieu qu'on ait pris ce point ou ce *centre* O, où l'on transporte les rotations : si l'on fait varier la position de ce point, la résultante θ ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en divers lieux de l'espace; mais le plan et la grandeur du couple de rotations $(\rho, -\rho)$ changeront nécessairement.

18. Si l'on veut une réduction générale où il n'y ait rien d'arbitraire, on pourra toujours choisir le point O de manière que le plan du couple résultant soit perpendiculaire à l'axe de la rotation résultante. En effet, tout étant d'abord réduit à la rotation θ et au couple de rotations $(\rho, -\rho)$ relativement à un point quelconque O de l'espace, décomposez le couple $(\rho, -\rho)$ en deux : l'un $(\rho', -\rho')$, dans un plan perpendiculaire à l'axe $O\theta$; l'autre $(\rho'', -\rho'')$, dans un plan conduit par cet axe Si vous transportez la rotation θ dans ce plan et parallèlement à elle-même jusqu'en $O'\theta$, de manière que le couple produit $(\theta, -\theta)$ soit égal et contraire au couple $(\rho'', -\rho'')$, et par conséquent le détruise, il ne restera que la rotation θ autour du nouvel axe $O'\theta$, avec le couple $(\rho', -\rho')$ dans un plan perpendiculaire au même axe, ce qu'il fallait trouver; et cet axe singulier $O'\theta$, qui se détermine exactement comme celui que j'ai nommé en Statique l'*axe central* des moments ou des couples de forces, peut aussi être nommé l'*axe central* des couples de rotations.

Ainsi *un système quelconque de rotations est toujours réductible à une seule rotation autour d'un certain axe déterminé, et à un couple de rotations situé dans un plan perpendiculaire à cet axe.* Et il est clair que ce couple résultant est le *minimum* de tous ceux qu'on trouverait relativement à tous les points ou centres O qui seraient pris hors de cet axe central. Car si l'on transportait partout ailleurs la rotation θ, elle produirait un couple $(\theta, -\theta)$ perpendiculaire sur le couple $(\rho', -\rho')$; et ces deux couples étant rectangulaires entre eux, donneraient par leur composition un couple résultant supérieur au couple $(\rho', -\rho')$.

19. Comme un couple de rotations équivaut à une pure translation du corps suivant la perpendiculaire au plan de ce couple, il s'ensuit que *tout le mouvement d'un corps, en vertu de tant de rotations*

qu'on voudra, se réduit, en dernière analyse, à tourner sur une certaine droite et à glisser en même temps le long de cette droite : ce qui est, comme on le verra plus loin, le mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.

20. Si le couple résultant *minimum* est nul, tout le mouvement se réduit à une simple rotation : si la résultante est nulle, il se réduit à une simple translation; et réciproquement, chacune de ces réductions ne peut avoir lieu sans que la condition supposée ne soit remplie. Enfin, pour que toutes les rotations du système se détruisent entre elles, et qu'ainsi tout le mouvement du corps se réduise à zéro, il faut que la résultante et le couple résultant soient nuls tous les deux à la fois, et cela, en quelque lieu de l'espace qu'on ait transporté toutes les rotations.

Remarque.

On voit la parfaite symétrie de cette composition des rotations et de celle des forces : elles sont presque identiques; car si l'on avait primitivement donné le nom de *force* à la cause capable de faire tourner sur un axe, on aurait eu pour ces nouvelles forces une Statique toute semblable. Seulement, dans celle-ci, les simples forces (toujours considérées comme transportées au centre de gravité du corps) auraient répondu à nos couples dans la Statique ordinaire, et les couples auraient répondu à nos simples forces. Mais il était, je crois, plus naturel, je veux dire plus conforme à la nature de l'esprit humain, de commencer, comme on l'a fait, par donner le nom de *force* à la cause capable d'une pure *translation*, et de voir ensuite dans le *couple* la cause capable d'un pur mouvement de *rotation*.

Toutefois, c'est une chose très-remarquable, qu'un même livre, écrit sur la science des forces, pourrait, sans cesser d'être exact et de traiter régulièrement la même science, être entendu de deux manières différentes, selon qu'on attacherait au mot de *force* l'idée d'une cause de translation, ou l'idée toute différente d'une cause de rotation. Nous pourrons revenir ailleurs sur ce point de philosophie.

21. On vient de voir tout ce qui regarde l'idée de la rotation simple

sur un axe, et la composition de semblables rotations autour d'axes situés d'une manière quelconque dans l'espace. Mais il faut se faire maintenant une idée du mouvement d'un corps mobile autour d'un point fixe sur lequel il semble pirouetter en tous sens.

VII.

Idée de la rotation autour d'un point.

22. Le mouvement d'un corps qui tourne sur un axe immobile étant le seul dont nous ayons une idée claire, c'est donc à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière quelconque autour d'un point ou centre fixe O.

Or je dis que ce mouvement, quel qu'il soit, si l'on ne le regarde que durant un instant, n'est autre chose qu'une rotation simple autour d'un certain axe passant par le point O et dont la direction reste immobile pendant cet instant. En effet, considérons deux points quelconques A et B du corps, lesquels avec le centre O forment le triangle OAB. De quelque manière que le corps se meuve, il est certain qu'au bout d'un instant on trouvera que le point A est arrivé quelque autre part en A′, et le point B en B′, de manière que le triangle OAB aura pris dans l'espace la position infiniment voisine OA′B′. Or il est clair que ce mouvement pourrait être produit par deux rotations successives : l'une p autour de la commune intersection OS des deux plans de ces triangles, et qui amènerait le triangle OAB dans un même plan avec son égal OA′B′; l'autre q, autour de la perpendiculaire OH à ce plan, et qui amènerait le point A sur A′ et, par conséquent, B sur B′. Mais ces deux rotations p et q autour de deux axes qui se croisent au point O, peuvent toujours se réduire à une seule θ autour d'un axe OI passant par le même point. Donc, *de quelque manière qu'un corps se meuve autour d'un point fixe, son mouvement ne peut être, dans l'instant que l'on considère, qu'une simple rotation de ce corps autour d'un axe passant par ce point, et qui reste immobile dans le corps et dans l'espace pendant cet instant.*

D'ou l'on peut conclure que, dans l'instant suivant, c'est de même une rotation simple, mais autour d'un autre axe; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : de sorte que le mouvement du corps peut être

considéré comme une suite de ces mouvements simples dont chacun ne présente à l'esprit qu'une idée nette. C'est ainsi que, pour se faire l'idée du mouvement d'un point en ligne courbe, on se représente ce point comme décrivant les côtés successifs d'un polygone infinitésimal qu'on imagine inscrit à cette courbe. On a donc ce théorème :

23. *Le mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque sur un point fixe, n'est autre chose qu'une rotation de ce corps sur un axe qui passe toujours par le point fixe, mais dont la direction change d'un instant à l'autre, et que, pour cette raison, l'on appelle l'*AXE INSTANTANÉ. Et il en est précisément de cet *axe instantané* dans la rotation d'un corps, comme de la *tangente* à une courbe dans le mouvement du point qui la décrit.

24. Il faut bien remarquer que cet axe instantané change de position et dans le corps et dans l'espace tout à la fois : car, comme il est à la fois immobile dans le corps et dans l'espace pendant la durée d'un instant, et qu'au bout de cet instant, on le suppose dans une autre position, il est clair qu'il ne peut plus être au même lieu ni dans l'espace absolu, ni dans l'intérieur du corps : et l'on peut même ajouter que l'angle qu'il décrit dans l'espace, et qui fait son mouvement absolu, est le même qu'il décrit dans l'intérieur du corps, et qui fait son mouvement relatif.

Lors donc que nous voyons un corps tourner sur un axe invariable de position dans le corps, mais variable de position dans l'espace, nous devons conclure que cet axe n'est point l'axe instantané autour duquel se fait réellement la rotation : car l'axe instantané ne pourrait rester immobile dans le corps sans rester aussi immobile dans l'espace.

VIII.

Image sensible de cette rotation.

Quoique l'analyse précédente soit exacte, et que je me sois efforcé de la rendre claire, il faut convenir que l'idée du mouvement d'un corps tournant sur un axe qui varie sans cesse est encore un peu obscure ; je veux dire qu'on ne voit pas bien ce qui arrive au corps, et qu'on a de la peine à le suivre dans le cours de cette espèce de

rotation changeante. Il faut donc tâcher d'éclaircir encore cette idée, et de présenter à l'esprit quelque image plus nette et plus sensible.

25. Or on vient de démontrer qu'un mouvement quelconque d'un corps autour d'un point fixe ne peut être qu'une rotation de ce corps sur un certain axe qui change de position d'un instant à l'autre. Donc, puisque cet axe *instantané* passe toujours par le point fixe, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'espace qu'une certaine surface conique dont le sommet est en ce point; et de même, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'intérieur du corps qu'une autre surface conique de même sommet.

Soit donc O ce commun sommet, et OI l'axe instantané dans la position actuelle que l'on considère; et concevons du centre O et d'un rayon quelconque OI une sphère décrite qui coupe les deux surfaces coniques suivant deux courbes qui seront comme les bases de ces deux surfaces. De ces deux courbes, la première σ est fixe dans l'espace absolu, et la seconde s est fixe dans le corps, et, par conséquent, mobile avec lui dans l'espace. FIG. 9.

Divisons le temps t en particules égales infiniment petites dt que nous nommerons des instants; et soient marqués, sur la courbe fixe σ, les points successifs α, β, γ, δ, etc., où vient passer d'un instant à l'autre le pôle I de l'axe de rotation. Joignons Iα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, etc., par des arcs de grands cercles, et considérons la courbe comme un polygone sphérique d'une infinité de côtés Iα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, etc.

Si l'on divise maintenant l'autre courbe s, qui sert de base au cône mobile, en arcs de grands cercles Ia, ab, bc, etc., respectivement égaux aux premiers, il est clair qu'au premier instant dt, le corps qui tourne sur OI amène le point a du corps sur le point α de l'espace; que dans l'instant suivant, le corps qui tourne sur Oα amène le point b du corps sur le point β de l'espace; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : de sorte que la courbe s, qui sert de base au cône mobile, vient appliquer l'un après l'autre tous ses divers éléments sur les éléments respectivement égaux de l'autre courbe σ, qui sert de base à la surface du cône fixe. D'où je conclus que le mouvement du corps pourrait être produit par le cône mobile qui *roulerait*, sans *glisser*, sur le cône fixe dont il s'agit.

26. Nous avons donc ce nouveau théorème :

De quelque manière qu'un corps se meuve en tournant autour d'un point fixe, ce mouvement ne peut être autre chose que celui d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui roule actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet.

Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec soi, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera décrire à ce corps le mouvement précis dont on le suppose animé; que la ligne de contact de ces deux cônes sera, à chaque instant, l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce qu'on appelle l'*axe instantané* : d'où l'on voit comment cet axe est à la fois mobile dans le corps et dans l'espace absolu : décrivant dans l'espace la surface du cône fixe, et dans l'intérieur du corps, la surface du cône mobile dont on vient de parler.

27. Tel est, je crois, le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si complexe et si obscure du mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un centre fixe. Il n'y a point de mouvement de cette nature qu'on ne puisse exactement produire en faisant rouler un certain cône sur un autre cône fixe de même sommet; de sorte que, si l'on imagine tous les cônes possibles qu'on ferait ainsi rouler, l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les mouvements possibles dont un corps soit capable autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter en tous sens.

Et même, s'il s'agissait d'un mouvement de rotation qui fût discontinu, c'est-à-dire où l'axe de rotation, au lieu de changer de position par degrés insensibles, sauterait brusquement d'une position à l'autre par un angle fini, on pourrait également imiter le mouvement du corps, en prenant, au lieu de deux cônes, deux pyramides de même sommet, et de faces respectivement égales, et faisant rouler l'une sur l'autre, de manière que la pyramide mobile tournant sur la commune arête, vînt appliquer, l'une après l'autre, toutes ses différentes faces sur les faces respectivement égales de la pyramide fixe. C'est, en effet, ce qui résulte de la démonstration même que j'ai donnée plus haut.

Remarque I.

28. Au reste, il est bon de remarquer, dans cette démonstration, que si j'ai pris, sur l'axe instantané OI, une ligne OI de *longueur constante*, c'était uniquement pour mieux fixer les idées, en montrant les deux courbes décrites par le pôle instantané comme étant tracées sur une même sphère. Mais il est évident que la démonstration se ferait de la même manière en prenant sur l'axe instantané une ligne OI de longueur *variable*, suivant une loi quelconque, et considérant les deux courbes décrites par son extrémité I, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu. On aurait toujours les deux mêmes surfaces coniques, mais terminées ici par ces deux nouvelles courbes qui leur serviraient de bases; et l'on verrait de même que la courbe mobile vient appliquer, l'un après l'autre, tous ses éléments successifs sur les éléments respectivement égaux de la courbe fixe : d'où l'on tirerait exactement le même théorème.

Remarque II.

29. Il n'est peut-être pas inutile de faire aussi une remarque sur l'idée nette qu'il faut attacher aux mots quand on dit le *mouvement* de l'axe instantané, ou qu'on emploie quelque autre terme qui suppose la *mobilité* de cet axe, soit dans le corps, soit dans l'espace. Ce n'est ici qu'une manière de s'exprimer. L'axe instantané ne se *meut* point : car il est immobile de sa nature pendant un instant, et au bout de cet instant, c'est une *autre ligne* qui devient à son tour l'axe de la rotation. Mais en se figurant l'ensemble de toutes ces lignes, menées d'avance, les unes dans le corps et les autres dans l'espace, et leur donnant le commun nom d'axe *instantané*, on peut dire naturellement la surface *décrite* par cet axe, au lieu de dire la surface formée par la suite de toutes ces lignes dont chacune doit devenir à son tour l'axe de rotation. Et de même, au lieu de l'angle $d\varphi$ compris entre deux génératrices consécutives de cette surface, on peut dire l'angle *décrit* en un instant dt par l'axe instantané, et nommer ainsi le rapport $\frac{d\varphi}{dt}$ la *vitesse angulaire* avec laquelle cet axe trace à la fois les

deux surfaces coniques dont il s'agit. C'est dans le même sens qu'on nomme le rapport $\frac{ds}{dt}$, ou le rapport $\frac{d\sigma}{dt}$ qui lui est égal, la *vitesse* avec laquelle le pôle instantané I se meut le long des deux courbes s et σ, l'une dans le corps et l'autre dans l'espace, quoique le point du corps qui fait en ce moment le pôle instantané n'ait de sa nature aucune vitesse. Car ce point du corps, tant qu'il fait le pôle, est immobile; et sitôt qu'il se meut, il n'est plus le pôle de la rotation.

IX.

Des différentes choses que l'on peut naturellement considérer dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point, et de la dépendance mutuelle de ces choses.

30. Si les deux courbes s et σ, qui servent de bases aux deux surfaces coniques, sont données, avec la vitesse angulaire θ de rotation autour de l'axe instantané OI, il est évident que le mouvement du corps sera entièrement déterminé.

Si, la vitesse angulaire θ étant toujours connue, une seule de ces deux courbes est donnée avec la vitesse du pôle qui la décrit, l'autre courbe sera nécessairement donnée.

Supposons, par exemple, que la courbe fixe σ soit donnée avec la vitesse $\frac{\omega\sigma}{dt}$ du pôle instantané I le long de cette courbe. Comme le corps tourne sur OI avec une vitesse angulaire θ aussi donnée, il est clair que le point du corps qui, au bout de l'instant dt, doit venir tomber sur la courbe fixe σ pour y être à son tour le pôle instantané, est un point déjà déterminé dans le corps; et il en est de même des autres points du corps que les rotations successives doivent amener l'un après l'autre, comme pôles, sur la courbe fixe et donnée σ : d'où l'on voit que l'autre courbe s, qui marque la route du pôle dans l'intérieur du corps, est entièrement déterminée.

Et réciproquement, si, au lieu de la courbe fixe σ, on se donne la courbe mobile s, avec le vitesse $\frac{\omega s}{dt}$ et la rotation θ, on verra de même que la courbe fixe σ se trouvera entièrement déterminée dans l'espace

31. En général, dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point fixe, il se présente naturellement plusieurs quantités simples à considérer, telles que la vitesse angulaire θ de rotation autour de l'axe instantané OI; la vitesse angulaire ω avec laquelle cet axe trace les deux surfaces coniques S et Σ qu'il décrit en même temps, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu; les rayons de courbure r et ρ de ces deux surfaces; les mouvements angulaires p et π du pôle, l'un autour de l'axe OP du cône osculateur de la surface mobile S, et l'autre autour de l'axe OΠ du cône osculateur de la surface fixe Σ; etc. Et si, de ces différentes choses, trois quelconques sont connues, on peut dire que les autres le sont aussi, et que le mouvement du corps est entièrement déterminé.

On peut se faire une idée nette de ces relations mutuelles, en prenant sur l'axe instantané une longueur constante OI $= 1$, et considérant les deux courbes s et σ, décrites par le pôle I, comme deux polygones sphériques d'une infinité de côtés.

Car, pendant l'instant dt, où le pôle reste immobile en I, le côté ds du polygone sphérique mobile s décrit, pour venir se coucher sur le côté égal $d\sigma$ du polygone fixe σ, un angle formé par la somme de l'angle extérieur de du polygone mobile et de l'angle extérieur $d\varepsilon$ du polygone fixe, ou par la différence de ces deux angles, si les deux courbes s et σ ont leurs convexités tournées dans le même sens. La vitesse angulaire θ, autour de l'axe instantané OI, est donc exprimée par la *somme* ou par la *différence* de ces deux angles, divisée par l'élément dt du temps; de sorte qu'on a FIG. 10. FIG. 11.

$$\theta = \frac{de \pm d\varepsilon}{dt}$$

(le signe $\pm$, selon que les deux courbes s et σ ont, au point de contact I, leurs convexités opposées l'une à l'autre, ou tournées dans le même sens).

Or l'angle extérieur de du polygone sphérique s n'est autre chose que l'angle extérieur dièdre, formé par le prolongement d'une face avec la face suivante, dans la pyramide centrale dont ce polygone sphérique est la base; et cet angle dièdre étant égal à celui que font entre elles les deux perpendiculaires élevées sur les faces voisines, a

pour mesure $\frac{ds}{r}$, si l'on nomme r le rayon de courbure de la surface conique au point I que l'on considère. On a donc

$$de = \frac{ds}{r}.$$

et l'on a de même

$$d\xi = \frac{ds}{\rho},$$

en nommant ρ le rayon de courbure de l'autre surface au même point I : d'où résulte, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente,

$$\theta = \frac{ds}{r} - \frac{ds}{\rho}.$$

Mais $\frac{ds}{dt}$ (ou $\frac{a\sigma}{dt}$ qui lui est toujours égal), marque la vitesse angulaire avec laquelle l'axe instantané OI trace à la fois les deux surfaces coniques; en faisant donc

$$\frac{ds}{dt} = \omega,$$

on a

$$\theta = \omega\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right),$$

ce qui donne une relation très-simple entre la rotation θ, le mouvement angulaire ω de l'axe instantané, et les rayons de courbure r et ρ des deux surfaces coniques qu'il décrit.

FIG. 12. **32.** Si l'on suppose menés ces deux rayons de courbure $IP = r$, $I\Pi = \rho$, et qu'on joigne OP et OΠ, on aura les axes des deux cônes droits et circulaires osculateurs des deux surfaces; et les deux perpendiculaires abaissées du pôle I sur ces deux axes OP et OΠ, seront les rayons a et α des cercles qui servent de bases à ces cônes osculateurs.

On a, par la figure,

$$[illegible]$$

Ainsi l'on peut introduire dans l'équation précédente, au lieu des rayons de courbure r et ρ des deux cônes, les rayons a et α des deux cercles

qui leur servent de bases; et l'équation devient

$$\theta = \frac{\omega}{a}\sqrt{1-a^2} \pm \frac{\omega}{\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Mais ω étant la vitesse angulaire de l'axe instantané sur la surface du cône, il est clair que $\frac{\omega}{a}$ est la vitesse angulaire de la projection de cet axe OI sur la base, et, par conséquent, c'est le mouvement angulaire du pôle I autour de l'axe OP de ce cône; et, de même, $\frac{\omega}{\alpha}$ est son mouvement angulaire autour de l'axe OΠ de l'autre cône. Si donc on désigne ces deux mouvements angulaires par p et π, ou qu'on fasse $\frac{\omega}{a} = p$, $\frac{\omega}{\alpha} = \pi$, on en tire d'abord la proportion

$$p : \pi :: \alpha : a,$$

et ensuite, d'après l'équation précédente,

$$\theta = p\sqrt{1-a^2} \pm \pi\sqrt{1-\alpha^2}.$$

D'où l'on voit que les mouvements angulaires du pôle, autour des axes des cônes osculateurs, ne sont autre chose que la rotation θ décomposée en deux p et π autour des mêmes axes : car, OI étant égal à 1, il est clair qu'en nommant x et ξ les inclinaisons de OI sur les axes OP et OΠ, on a

$$a = \sin x \quad \text{et} \quad \alpha = \sin \xi :$$

de sorte que les deux relations précédentes équivalent à cette suite de rapports égaux :

$$p : \pi : \theta :: \sin \xi : \sin x : \sin(x + \xi) :$$

ce qui montre que p et π sont les deux côtés d'un parallélogramme dont θ est la diagonale.

33. On voit donc comment ces diverses quantités sont liées entre elles, et peuvent se trouver quand on en connaît trois en fonction du temps.

Si ces trois quantités données sont *constantes*, toutes les autres le sont aussi : et le mouvement du corps est celui d'un cône droit à base

circulaire qui roule uniformément sur un cône fixe également droit et circulaire.

Ainsi, la terre tourne en un jour sur son axe OI, tandis que cet axe décrit, *en sens contraire*, un cône droit autour de l'axe OΠ de l'écliptique, sous un angle ξ de $26^\circ 8'$, et avec une vitesse angulaire π mesurée par le mouvement *rétrograde* des équinoxes, et qui est d'environ 42 tierces centésimales par jour. On connaît donc la rotation θ autour de l'axe instantané, le cône fixe Σ que cet axe décrit dans l'espace, et la vitesse angulaire π qu'il a dans ce mouvement. On peut donc déterminer dans la terre le cône S qui, roulant sur le premier Σ, et en dedans de sa surface, ferait décrire à la terre le mouvement précis qu'on y observe. Car, en prenant le jour pour unité de temps, on aura

$$\theta = 2\pi = 100^{\text{m}}, \quad \pi = 42^{\text{m}} \quad \text{et} \quad \sin\xi = \sin 26^\circ 8',$$

et les équations précédentes donnent

$$\operatorname{tang} x = \frac{\pi \sin\xi}{\theta + \pi\cos\xi} = \frac{42^{\text{m}} \sin 26^\circ 8'}{100^\circ + 42^{\text{m}} \cos 26^\circ 8'};$$

d'où l'on conclut le rayon $\sin x$ du petit cercle qui sert de base à ce cône mobile S : ce qui donne à peu près $1^{\text{m}},684$ de longueur à la petite circonférence que le pôle instantané de rotation de la terre décrit chaque jour à sa surface (tout ceci, d'ailleurs, dans l'hypothèse d'une rotation et d'une précession diurnes parfaitement uniformes).

X

Du mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.

[illegible] 7. — Considérez un point quelconque O du corps, et la vitesse actuelle u qu'il a dans l'espace; il est clair que tout le mouvement du corps, quel qu'il soit, peut être vu, dans cet instant, comme composé : 1° d'une simple translation qui emporterait toutes les molécules avec la même vitesse u suivant des lignes parallèles à la direction de cette vitesse; et 2° d'une simple rotation θ autour d'un certain axe OI passant par le point O que l'on considère. Car, en vertu du premier

de ces deux mouvements, le point O sera porté dans l'espace au lieu même où il doit être au bout d'un instant; et par le second autour d'un axe OI bien choisi, le corps pourra venir dans la position quelconque qu'on lui suppose au bout du même instant.

Or, s'il arrivait que la direction OU de la translation u fût perpendiculaire à l'axe OI de la rotation θ, tout le mouvement pourrait se réduire à une simple rotation θ autour d'un certain axe O'S parallèle à OI. Car menez suivant OI le plan perpendiculaire à OU, et supposez que dans ce plan, et du côté de l'axe où la vitesse de rotation des molécules est de sens contraire à leur vitesse de translation, on prenne un point O' à la distance $x = \frac{u}{\theta}$ de cet axe OI; il est évident que ce point O' aura dans l'espace une vitesse nulle $x\theta - u$, et qu'il en sera de même pour tous les points du corps situés sur la ligne O'S parallèle à OI. Donc, dans le cas particulier de OU perpendiculaire à l'axe instantané OI, le double mouvement du corps se réduit à une simple rotation autour d'un certain axe déterminé O'S, et qu'on nomme l'*axe spontané* de rotation. Fig. 14.

Actuellement, si OU n'est pas perpendiculaire à OI (ce qui est le cas le plus général), imaginez qu'on décompose la vitesse u de translation en deux, l'une v perpendiculaire à OI, et l'autre v' parallèle au même axe. La première v, combinée avec la rotation θ, donnera lieu à une rotation spontanée autour d'un certain axe parallèle à OI, comme on vient de le voir tout à l'heure; et la seconde v' transportera tous les points du corps dans une direction parallèle à cet axe spontané. Donc, dans le cas le plus général, *tout le mouvement d'un corps se réduit à tourner sur un certain axe et à glisser en même temps le long de cet axe : de sorte que ce mouvement est exactement le même que celui d'une vis qui tourne dans son écrou.* Tous les points du corps décrivent donc, sur des cylindres concentriques, de petits arcs *d'hélices* qui ont toutes le même pas. Dans l'instant suivant, c'est une autre *vis*, d'un autre axe et d'un pas différent; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : d'où l'on voit comment se forment les courbes simultanées que décrivent tous les points du corps, et le long desquelles ils se meuvent comme en autant de canaux curvilignes où ils seraient enfermés. Fig. 15.

35. On conçoit parfaitement le mouvement de translation, par lequel tous les points d'un corps sont portés suivant des lignes égales et parallèles dans l'espace; on conçoit avec autant de clarté le mouvement de rotation autour d'un axe qui demeure immobile : mais on ne voit pas si bien le mouvement unique et réel qui vient de la combinaison de ces deux-là pour chaque point du corps; et c'est la coexistence de ces deux mouvements en un seul, que j'ai voulu montrer dans le mouvement si connu d'une vis qui tourne actuellement dans son écrou.

Quelquefois le pas de cette vis est nul, et tout se réduit à une simple rotation sur un certain axe qui prend le nom d'*axe spontané de rotation*. Mais, en général, le pas de la vis n'est pas nul, et il n'y a point d'axe spontané proprement dit; c'est-à-dire que, dans le corps, il n'y a aucune ligne dont tous les points demeurent immobiles pendant un instant : mais il y a toujours ce qu'on pourrait nommer un axe *spontané glissant;* c'est-à-dire qu'il y a toujours dans le corps une ligne droite dont tous les points n'ont d'autre mouvement qu'une simple translation le long de cette droite.

36. Telle est donc la nature du mouvement des corps solides et l'idée nette qu'on peut s'en faire à chaque instant. Si un corps pirouette d'une manière quelconque sur un point fixe, c'est un certain cône mobile qui roule en cet instant sur un autre cône fixe de même sommet : et toutes les variétés de ce genre de mouvement sont données par les variétés de surfaces coniques que l'on peut considérer, et parmi lesquelles il faut comprendre le plan qui est la plus simple de toutes, le cylindre qui est un cône dont le sommet est à l'infini, et même la ligne droite qui est aussi un cas particulier des surfaces coniques. Enfin, si un corps se meut d'une manière quelconque dans l'espace, on peut le voir à chaque instant comme une certaine vis qui tourne actuellement dans son écrou. Et comme c'est aussi à ce mouvement que peuvent se réduire des rotations quelconques (n° **19**), on peut conclure que, par de simples rotations sur différents axes, on peut donner à un corps le mouvement le plus général dont il soit susceptible.

CHAPITRE II.

DES FORCES CAPABLES D'UN MOUVEMENT DONNÉ.

37. Après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, il faut chercher les forces capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la Dynamique.

Et d'abord je rappelle l'idée précise qu'il faut attacher au mot de *force* dans la théorie du mouvement. J'entends par *force* toute cause capable d'imprimer un mouvement uniforme et rectiligne à un corps libre, considéré comme un point *matériel*, c'est-à-dire comme un point où l'on conçoit qu'une certaine quantité de matière se trouve concentrée. La direction et le sens du mouvement de ce point font la *direction* et le *sens* de la force; et la *grandeur* de cette force a pour mesure le produit de la masse par la vitesse imprimée.

38. Cette définition de la force étant posée, je dis que, quel que soit le mouvement d'un corps dans l'espace, il y a toujours des forces qui, étant appliquées à ce corps supposé en repos, sont capables d'y produire le mouvement qu'on y observe. Et en effet, dans ce mouvement, chaque molécule dm du corps ayant dans l'espace une certaine vitesse u, il est évident que cette molécule pourrait être regardée comme en repos, mais animée tout à coup par une force udm qui produirait sa vitesse. Donc, si l'on considère l'infinité des forces semblables udm appliquées à toutes les molécules respectives du corps, on aura certainement des forces capables de produire sur le corps le mouvement donné. Donc, si l'on imagine que, par les lois statiques de la composition des forces, on ait réduit toutes ces forces élémentaires udm à d'autres P, Q, R, etc., on aura un autre système de forces également capables du mouvement donné.

39. Mais il y a une différence essentielle à remarquer entre le système des forces udm appliquées à tous les éléments du corps, et les forces P, Q, etc., auxquelles on les aurait réduites par la compo-

sition. Si le mouvement produit est le même dans les deux cas, l'état intérieur du corps ne sera pas le même au premier instant. Car il est évident que les forces élémentaires *udm*, étant individuellement appliquées, chacune à chacune des molécules de ce corps, sont capables d'y produire le mouvement donné, même en supposant que ces molécules ne soient pas liées entre elles au premier instant; et par conséquent, sans exciter d'abord, dans les liens qui les unissent, aucune compression, ou traction brusque qui tendrait à les rompre. Sous l'action de ces forces élémentaires *udm*, le mouvement du corps est donc comme *spontané;* c'est-à-dire que les liens du corps ne sont pas nécessaires au premier instant; et si, dans la suite du mouvement, ces liens se trouvent tendus, ce ne peut être que par les forces centrifuges qui naissent des mouvements curvilignes que les molécules sont obligées de suivre à cause de leur liaison mutuelle.

Mais si, au lieu de ces forces élémentaires *udm*, on applique au corps leurs réduites P, Q, etc., il faut nécessairement supposer que les molécules soient liées entre elles dès le premier instant, afin que ces forces P, Q, etc., puissent réellement se décomposer dans les forces élémentaires *udm*, seules capables du mouvement spontané du corps. Ainsi, sous l'action des forces P, Q, etc., les liens du corps sont nécessaires au premier instant; car ils commencent par ressentir une action brusque et finie à laquelle ils doivent d'abord résister : et tout se passe ensuite comme dans le premier cas, où les liens ne souffrent plus que les tensions qui naissent à chaque instant des forces centrifuges.

40. Cette distinction qu'on vient de faire, qui est nulle quant au mouvement produit sur le corps, est donc essentielle quant à l'état intérieur initial de ce corps : car il peut être affecté, au commencement, d'autant de manières différentes qu'on peut lui appliquer de différents systèmes de forces, également capables de lui imprimer le mouvement qui l'anime. Mais, si l'on ne considère que le mouvement du corps, sans s'occuper des secousses ou tractions brusques qu'il peut ressentir dans son intérieur, et qu'il doit détruire par sa solidité, il est permis de composer les forces élémentaires *udm*, et de les réduire ainsi à d'autres, comme, par exemple, à une seule force et à

un seul couple, dont l'ensemble sera également capable du mouvement donné : c'est ce qu'on va faire dans les articles suivants; après quoi on réduira de même les forces centrifuges qui naissent de la rotation.

I.

Des forces capables d'un pur mouvement de translation.

41. Si un corps n'a dans l'espace qu'un pur mouvement de translation, de sorte que toutes les molécules s'avancent dans le même sens, avec la même vitesse u, suivant des droites parallèles, il est clair que toutes les forces élémentaires udm dont ces molécules sont animées sont aussi parallèles, de même sens et proportionnelles aux masses respectives dm de ces molécules. Or on sait que de telles forces sont toujours réductibles à une seule R, parallèle et de même sens, égale à leur somme $\int udm$, et passant par le centre de gravité du corps.

Donc, réciproquement, *si une force quelconque* R *est appliquée au centre de gravité d'un corps solide, comme elle pourra toujours se décomposer en forces parallèles et de même sens, appliquées aux molécules de ce corps, et proportionnelles aux masses de ces molécules, l'effet de cette force* R *sera de transporter toutes les parties du corps, suivant sa propre direction, et avec une commune vitesse* $u = \mathrm{R} : m$, *c'est-à-dire égale à la grandeur de cette force divisée par la masse entière* m *du corps dont il s'agit*. Ce qui était, pour ainsi dire, évident de soi-même.

42. Si cette force R, passant toujours par le centre du corps, changeait de direction et de grandeur à chaque instant par l'action de quelque force accélératrice étrangère passant par le même centre, le mouvement du corps n'en serait pas moins un pur mouvement de translation, je veux dire que le corps n'aurait aucune rotation sur lui-même. Tous les points de ce corps décriraient, il est vrai, des lignes courbes; mais tous les éléments simultanés de ces courbes décrites seraient égaux et parallèles entre eux : de sorte qu'en regardant un plan quelconque attaché au corps, et par conséquent mobile avec lui dans

l'espace, on trouverait ce plan toujours parallèle à lui-même dans la suite du mouvement.

II.

Des forces capables d'une pure rotation sur un axe donné.

Fig. 16 **43.** Supposons qu'un corps tourne, dans l'instant que l'on considère, autour d'un axe quelconque donné OZ, avec une vitesse angulaire θ; il est clair que, dans ce mouvement, une molécule quelconque dm, prise à la distance r de cet axe OZ, a une vitesse θr, dirigée suivant la tangente du cercle que cette molécule tend à décrire. Ainsi la force qui l'anime a la même direction, et elle est exprimée par θrdm. Toutes les molécules du corps sont donc animées par des forces semblables θrdm, proportionnelles à leurs masses dm et à leurs distances r de l'axe de rotation, et suivant des directions qui sont à la fois perpendiculaires à ces distances et à la direction de l'axe donné : et il s'agit de voir comment on peut réduire toutes ces forces élémentaires à d'autres d'un effet équivalent, c'est-à-dire également capables de la rotation θ du corps autour de l'axe libre et donné OZ.

Réduction de ces forces.

44. Pour opérer cette réduction d'une manière facile et appropriée au calcul, soient menés, par un point quelconque O de cet axe, deux autres axes OX et OY perpendiculaires entre eux et à celui-là; et nommons x, y, z les coordonnées de la molécule dm relativement à ces axes.

Je conçois la force θrdm décomposée en trois autres X, Y, Z parallèles aux trois axes; ce qui donne évidemment pour la première $X = \theta ydm$, pour la seconde $Y = -\theta xdm$, et pour la troisième $Z = 0$.

Si l'on transporte ces forces parallèlement à elles-mêmes au point O, il en provient d'abord deux forces,

$$X = \theta ydm,$$
$$Y = -\theta xdm.$$

appliquées en O suivant les axes mêmes OX et OY; ensuite, trois couples L, M, N autour des trois axes respectifs des x, y, z, et dont les moments sont exprimés par $(Yz - Zy)$, $(Zx - Xz)$, $(Xy - Yx)$: ce qui donne, en mettant pour X, Y, Z leurs valeurs,

$$L = -\theta xz\,dm,$$
$$M = -\theta yz\,dm,$$
$$N = \theta(y^2 + x^2)\,dm = \theta r^2\,dm.$$

Donc, si l'on fait pour chaque force $\theta r dm$ la même transformation, et qu'on indique par le signe $\int$ la somme de tous les termes semblables à celui qu'on écrit sous ce signe, toutes les forces $\theta r dm$ capables de la rotation donnée se trouveront réduites aux forces et aux couples suivants, savoir :

1°. Deux forces $X = \theta \int y dm$, $Y = -\theta \int x dm$, l'une suivant OX, l'autre suivant OY, forces qu'on peut réduire à une seule P, perpendiculaire à OZ, et dont la valeur sera

$$P = \theta \sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2},$$

ou, si l'on veut, en nommant D la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du corps sur l'axe OZ, on aura, pour la valeur de cette force, l'expression plus simple

$$P = \theta m D;$$

2°. Deux couples $L = -\theta \int xz dm$, $M = -\theta \int yz dm$, autour des deux premiers axes OX et OY, couples qu'on peut réduire à un seul K, dont le plan passe par OZ, et dont le moment est

$$K = \theta \sqrt{(\int xz dm)^2 + (\int yz dm)^2};$$

3°. Et enfin on aura le couple N dont le moment est

$$N = \theta \int (x^2 + y^2)\,dm = \theta \int r^2\,dm,$$

et qui agit dans un plan perpendiculaire à l'axe donné OZ.

Ainsi, en prenant les cinq intégrales

$$\int x dm, \quad \int y dm, \quad \int xz dm, \quad \int yz dm, \quad \int (x^2 + y^2)\,dm,$$

qu'il faut étendre à la masse entière m du corps, on déterminera com-

plétement la force P, le couple K et le couple N dont l'ensemble P, K, N est capable de la rotation θ autour de l'axe donné OZ.

Corollaire I.

45. Si cet axe OZ passe par le centre de gravité du corps, on aura

$$\int x dm = 0, \quad \int y dm = 0, \quad \text{d'où} \quad P = 0;$$

et toutes les forces seront réduites aux deux couples K et N, ou si l'on veut, à leur résultant

$$G = \sqrt{K^2 + N^2}.$$

D'où je conclus que *les forces capables de faire tourner un corps sur un axe passant par le centre de gravité sont toujours réductibles à un couple.*

Sur quoi il est bon de remarquer que ce couple G n'est point perpendiculaire à l'axe de rotation, puisqu'il fait avec cet axe OZ un angle dont le cosinus $\frac{K}{\sqrt{K^2 + N^2}}$ ne peut être nul à moins qu'on n'ait $K = 0$.

Corollaire II.

46. Mais s'il arrive que cet axe OZ soit un des axes principaux du corps, on aura, comme on le sait,

$$\int xz dm = 0, \quad \int yz dm = 0,$$

et alors le couple K sera nul, et toutes les forces seront réduites au seul couple $N = \theta \int r^2 dm$, lequel est perpendiculaire à l'axe donné OZ.

D'où je conclus que *les forces capables de faire tourner un corps sur un de ses axes principaux sont toujours réductibles à un couple perpendiculaire à cet axe principal.*

Et réciproquement, un couple quelconque N perpendiculaire à l'un des axes principaux est toujours décomposable en forces élémentaires $\theta r dm$ capables de faire tourner sur cet axe avec une vitesse angulaire $\theta = N : \int r^2 dm$; car de telles forces $\theta r dm$ se réduiraient à un

couple $\theta . \int r^2 dm$ de même grandeur et de même position que le couple donné N.

On a donc ce théorème simple et facile à retenir :

Si un couple est appliqué sur un corps libre dans un plan perpendiculaire à l'un de ses axes principaux, son effet sera de faire tourner le corps sur cet axe lui-même avec une vitesse angulaire égale au moment de ce couple, divisé par le moment d'inertie du corps autour de cet axe principal.

COROLLAIRE III.

47. Par ce seul théorème particulier, on peut trouver sur-le-champ l'effet d'un couple G appliqué au corps dans tel plan qu'on voudra. Car en décomposant ce couple donné en trois autres L, M, N perpendiculaires aux trois axes principaux du corps, et nommant A, B, C les trois moments d'inertie qui se rapportent à ces axes, on aura

$$p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C},$$

pour les trois rotations respectives p, q, r que ces couples tendent à produire autour des mêmes axes : de sorte que si l'on compose ces trois rotations en une seule θ, on aura l'axe et la grandeur de la rotation à laquelle le couple proposé G tend à donner naissance au premier instant; ce qui est, comme on voit, de la plus grande simplicité.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

Des forces capables d'un mouvement quelconque; et, réciproquement, du mouvement que prend un corps en vertu de forces quelconques données.

48. D'après ce qu'on vient de dire, il est bien facile de trouver la force et le couple dont l'ensemble est capable d'un mouvement quelconque donné. Car, quel que soit ce mouvement, vous pouvez toujours le concevoir comme décomposé en deux : l'un, qui consiste dans une pure translation égale et parallèle au mouvement du centre de gravité du corps; et l'autre, dans une simple rotation autour d'un axe passant par le même centre. On n'aura donc qu'à prendre la

force R capable du premier de ces deux mouvements, et le couple G capable du second, et le problème sera résolu.

49. Réciproquement, quelles que soient les forces appliquées à un corps, imaginez qu'on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes au point qui fait le centre de gravité de ce corps : elles viendront s'y composer en une seule R, et tous les couples qui proviennent de leurs translations se composeront en un seul G.

Or la résultante R, étant appliquée au centre de gravité du corps, tend à imprimer à toutes les molécules une commune vitesse $u = \frac{R}{m}$, et dans la direction même de cette force R.

Le couple G tend à imprimer au corps une rotation θ autour d'un certain axe OI, passant par le même centre, et qu'on déterminera comme on l'a dit ci-dessus.

Remarque.

Fig. 17. **50.** Chaque molécule dm est donc animée par deux forces, l'une $u\,dm$ parallèle à R, l'autre $\theta r\,dm$ perpendiculaire à la fois à l'axe OI et à sa distance r de cet axe. Donc cette molécule décrit, à chaque instant dt, la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes infiniment petites $u\,dt$ et $\theta r\,dt$ qui représentent les espaces dus à ces forces.

Tels seront donc les mouvements de toutes les molécules du corps; et tous ces mouvements simultanés sont possibles, je veux dire qu'ils peuvent exister ensemble sans que la disposition mutuelle des molécules soit en rien altérée. Car tous les mouvements composants $u\,dt$, considérés à part, sont évidemment possibles; et il en est de même de tous les mouvements $\theta r\,dt$. Or il est clair que, par ces deux mouvements exécutés l'un après l'autre, on amènerait chaque molécule du corps au bout de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes $u\,dt$, $\theta r\,dt$, et par conséquent au lieu même où elle arriverait en suivant cette diagonale. Ainsi, tous les mouvements composés sont possibles ensemble, et ont effectivement lieu le long des diagonales respectives de ces parallélogrammes infiniment petits. Et si l'on veut se représenter dans l'espace toutes les petites diagonales que suivent à la fois toutes les molécules du corps, on a vu (n° 34) que

ce sont de petits arcs d'*hélices* toutes décrites du même *pas* sur des cylindres concentriques autour d'un certain axe O'S, qui n'est point l'axe instantané OI, mais qui lui est toujours parallèle, et que j'ai nommé l'*axe spontané glissant*.

III.

Des forces centrifuges qui naissent de la rotation.

51. Nous avons considéré plus haut (n° **43**) les forces fines $\theta r dm$, dont toutes les molécules d'un corps sont animées quand ce corps tourne avec une vitesse angulaire θ autour d'un axe donné OZ.

Mais de cette rotation même il naît, à chaque instant, pour chaque molécule dm, une force infiniment petite, qui tend à éloigner cette molécule du centre de sa rotation, et qu'on nomme ainsi la force *centrifuge*.

52. Pour se faire une idée nette de cette force, il faut d'abord remarquer qu'une molécule *libre* dm, animée de la seule force $u dm$ suivant la tangente d'un cercle, ne peut en rigueur décrire un arc de ce cercle, quelque petit qu'on le suppose, à moins qu'elle ne soit à chaque instant attirée vers le centre par une certaine force qui la retienne sur la circonférence; sans quoi cette molécule s'en irait par la tangente avec la vitesse u qui lui est imprimée. Cette force, qu'on nomme *centripète*, est du même genre que la gravité, et elle se mesure de la même manière, c'est-à-dire par la vitesse f qu'elle ferait acquérir au mobile dans l'unité de temps, si elle agissait toujours également sur lui; je veux dire si, à chacun des instants égaux, elle ajoutait un égal degré de vitesse au mobile. Dans un mouvement de cette nature, la vitesse acquise est donc proportionnelle au temps, de sorte qu'on a $f.t$ pour l'expression de cette vitesse acquise au bout du temps t; et $\frac{1}{2}f.t^2$ pour l'espace dont le mobile serait descendu vers le centre au bout de ce même temps t.

Quant à la grandeur f de cette force centripète, elle dépend évidemment de la vitesse u suivant la tangente et du rayon r du cercle décrit; et il est bien facile de la déterminer. Car, sans l'accession de cette force accélératrice, le point matériel s'en irait en un instant sur

la tangente par un espace $u\,dt$, et se trouverait ainsi éloigné de la circonférence à une petite distance égale à la partie extérieure e de la sécante menée de ce point par le centre du cercle. Pour que le point matériel ne quitte pas la circonférence, il faut donc que l'espace $\frac{1}{2} f . dt^2$, dont la force f est capable de le faire descendre en un instant dt, soit précisément égal à cette partie extérieure e. Or, par la géométrie, la partie extérieure de la sécante est égale au carré de la tangente divisé par la sécante entière; de sorte qu'on a, pour déterminer f, l'équation

$$\frac{1}{2} f . dt^2 = \frac{u^2 dt^2}{2r + e} \quad \text{ou} \quad f = \frac{2u^2}{2r + e};$$

d'où, en négligeant e, qui est un infiniment petit du second ordre par rapport aux lignes r, u et f, on tire

$$f = \frac{u^2}{r}.$$

Ainsi, *la force centripète nécessaire pour qu'un point libre puisse tourner en cercle avec une vitesse u suivant la tangente, est exprimée par le carré de cette vitesse, divisé par le rayon r du cercle qu'il décrit*. Et il est évident que la même expression convient à un mouvement curviligne quelconque, en prenant pour u la vitesse du point mobile, et pour r le rayon du cercle *osculateur* de la courbe au point que l'on considère.

Dans notre exemple, la vitesse tangentielle u est exprimée par θr; le carré en est $\theta^2 r^2$; et divisant par r, on trouve

$$f = \theta^2 r$$

pour l'expression de la force centripète d'un point qui tourne avec une vitesse angulaire θ dans un cercle de rayon r.

53. Cela posé, si à chaque force tangentielle $dm . \theta r$, qui anime chaque molécule du corps, on joignait la force centripète convenable, et que je représente par $-dm . \theta^2 r\,dt$ (en lui donnant le signe $-$, parce qu'elle tend à diminuer la distance r à l'axe OZ), il est manifeste que l'ensemble de ces molécules, et, par conséquent, le corps lui-même tournerait autour de l'axe OZ avec la vitesse angulaire θ; et cela, d'une manière entièrement libre, je veux dire, quand bien même les molécules de ce corps ne seraient pas liées entre elles, et, par con-

séquent, sans que cette rotation pût affecter en rien l'état intérieur du corps.

Dans la question qui nous occupe, chaque molécule dm n'est poussée que par la force tangentielle $dm \,.\, \theta r$, et il n'y a point de force centripète $-dm \,.\, \theta^2 r dt$ qui intervienne pour la faire tourner librement autour de l'axe OZ. Mais je considère que si cette force $-dm \,.\, \theta^2 r dt$ n'y est point, rien n'empêche de la supposer, pourvu qu'on en suppose une autre égale et contraire $+dm \,.\, \theta^2 r dt$. Ainsi, à la seule force d'impulsion $dm \,.\, \theta r$, il est toujours permis de substituer l'ensemble des trois forces

$$\theta r dm, \quad -dm \,.\, \theta^2 r dt, \quad +dm \,.\, \theta^2 r dt.$$

Mais alors on peut imaginer que pendant l'instant dt, les deux premières forces sont employées à faire tourner librement la molécule par un arc de cercle $\theta r dt$, tandis que la troisième force $+dm \,.\, \theta^2 r dt$ tire cette même molécule dans le sens où elle tend à l'éloigner du centre; et voilà précisément ce que j'appelle la force centrifuge *née* de la rotation du corps. Toutes les molécules sont donc tirées à chaque instant par des forces semblables, uniquement dues au mouvement de rotation : forces réelles, qui affectent l'état intérieur du corps par les *tensions* qu'elles produisent sur les liens, quels qu'ils soient, qui retiennent les molécules.

Réduction des forces centrifuges à une seule force et à un seul couple.

54. Toutes les forces centrifuges qui naissent de la rotation θ étant ainsi représentées par $dm \,.\, \theta^2 r dt$, elles ont, au facteur près θdt, la même expression que les forces finies $\theta r dm$, dont les molécules sont actuellement animées. Mais, au lieu d'agir suivant les *tangentes*, elles agissent suivant les *rayons* des cercles décrits; et elles sont ainsi perpendiculaires à ces premières forces $\theta r dm$, et à l'axe donné OZ. Si donc on les réduit de la même manière, en les transportant au même point O, elles donneront pour leur résultante π, analogue à la résultante P des premières forces, FIG. 18.

$$\pi = \theta^2 \sqrt{\left(\int x dm\right)^2 + \left(\int y dm\right)^2} = \theta P,$$

et pour leur couple résultant χ, analogue au couple K, et passant de

même par l'axe donné OZ.

$$\chi = \theta^2 \sqrt{\left(\int xz\,dm\right)^2 + \left(\int yz\,dm\right)^2} = \theta K :$$

et il n'y aura point de couple analogue au couple N autour de OZ, puisque les directions de ces forces centrifuges passent toutes par l'axe OZ lui-même.

55. Telles sont donc les valeurs de la force accélératrice et du couple accélérateur qui résultent des forces centrifuges. Quant à la position de cette force π, et à celle du couple χ, elles se voient presque immédiatement. Car, comme toutes les forces centrifuges $dm.\theta^2 r$, qui donnent la résultante π, sont respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux forces d'impulsion $\theta r dm$ qui donnent la résultante P, il est évident que π est perpendiculaire à P.

Par la même raison, l'axe du couple accélérateur χ est perpendiculaire à celui du couple K; et comme il est perpendiculaire à OZ qui est l'axe du couple N, il est aussi perpendiculaire à l'axe du couple G, qui est le résultant de N et K : on peut donc dire que l'*axe du couple χ dû aux forces centrifuges est perpendiculaire à la fois sur l'axe de la rotation θ et sur celui du couple d'impulsion* G.

Ainsi, P et G étant deux lignes qui, partant du point O, représentent, l'une la direction et la grandeur de la force P, l'autre l'axe et la grandeur du couple G, dont l'ensemble P et G est capable de la rotation θ autour de l'axe fixe OZ; si l'on nomme i l'inclinaison de G à l'axe de cette rotation θ (ce qui donne $K = G \sin i$), on a, pour la force et le couple accélérateurs π et χ qui naissent des forces centrifuges, ces expressions très-simples

$$\pi = \theta P \qquad \chi = \theta G \sin i,$$

π étant perpendiculaire à la fois à P et à l'axe θ et χ étant perpendiculaire à la fois à G et au même axe θ.

Remarque.

56. Quant aux *sens* de ces forces et de ces couples, ils sont bien faciles à reconnaître. Car on peut remarquer que si la direction de chaque force centrifuge faisait un quart de révolution *dans le sens même où le corps tourne*, elle deviendrait de même sens que la force d'impulsion. Donc les deux lignes $O\pi$ et $O\chi$, qui répondent à la ré-

sultante et au couple résultant des forces centrifuges, doivent être tellement posées par rapport aux lignes OP et OK qui répondent aux forces d'impulsion, que si $O\pi$ et $O\chi$ venaient à tourner d'un angle droit *dans le sens même de la rotation* θ, la ligne $O\pi$ viendrait se coucher sur OP, et la ligne $O\chi$ sur OK. D'où l'on voit avec clarté les positions précises qu'il faut donner aux lignes qu'on emploie dans la figure, pour représenter complétement les forces et les couples que l'on considère. On voit que si θ change de signe, comme P et K en changeront aussi, π et χ n'en doivent pas changer : et c'est en effet ce qui doit être, car il est évident que les forces centrifuges sont les mêmes, soit que le corps tourne dans un sens, soit qu'il tourne dans le sens contraire.

Corollaires.

57. Lorsque l'axe OZ de la rotation passe par le centre de gravité du corps, on a

$$\int x\,dm = 0 \quad \text{et} \quad \int y\,dm = 0, \quad \text{et partant,} \quad \pi = 0,$$

et toutes les forces centrifuges se réduisent au couple χ.

Si, de plus, l'axe OZ est un des trois axes principaux de ce corps, on a

$$\int xz\,dm = 0 \quad \text{et} \quad \int yz\,dm = 0, \quad \text{et partant,} \quad \chi = 0,$$

et toutes les forces centrifuges se font équilibre.

Et réciproquement, il n'y a qu'un tel axe autour duquel les forces centrifuges nées de la rotation puissent se contre-balancer mutuellement. Car pour l'équilibre, il faut avoir $\pi = 0$ et $\chi = 0$: or 1° π ne peut être nul à moins qu'on n'ait à la fois $\int x\,dm = 0$ et $\int y\,dm = 0$, c'est-à-dire à moins que l'axe OZ ne passe par le centre de gravité ; 2° χ ne peut être nul à moins qu'on n'ait à la fois $\int xz\,dm = 0$ et $\int yz\,dm = 0$, c'est-à-dire à moins que l'axe OZ ne soit un des axes principaux.

Remarque.

58. On voit par là qu'en Mécanique on peut chercher les axes principaux d'un corps par deux considérations différentes, mais qui mènent sur-le-champ aux mêmes équations : car on peut demander

autour de quel axe un corps doit-il tourner pour que les forces actuelles $\theta r dm$ qui animent ses molécules se réduisent à un couple N perpendiculaire à cet axe? ou bien, autour de quel axe le corps doit-il tourner pour que les forces centrifuges $\theta^2 r dm$ qui naissent de la rotation se fassent mutuellement équilibre?

En représentant cet axe inconnu par la ligne OZ, et considérant deux autres axes quelconques OX et OY perpendiculaires entre eux et à celui-là, on trouve que, dans l'un et l'autre cas, il faut avoir d'abord $\int x dm = 0$ et $\int y dm = 0$, d'où résulte que l'axe inconnu doit passer par le centre de gravité du corps ; et ensuite, qu'il faut avoir $\int xz dm = 0$ et $\int yz dm = 0$, d'où l'on tire la direction de cet axe. Ainsi les deux problèmes ne peuvent conduire qu'aux mêmes axes. Au reste, on verra plus loin, par la géométrie, que, dans un corps quelconque, il existe toujours trois axes de cette nature et qui sont rectangulaires entre eux.

59. Si le corps n'est pas libre, mais qu'il soit forcé de tourner sur un point fixe O, on n'a pas besoin d'avoir les deux premières conditions $\int x dm = 0$ et $\int y dm = 0$: car, le point O étant fixe, les deux forces P et π qui y sont appliquées se trouvent détruites. Il suffit donc de faire nul ou le couple K, ou le couple $\chi = \theta K$, ce qui revient au même, et ne donne à remplir que les deux conditions $\int xz dm = 0$, $\int yz dm = 0$. Or ces équations mènent aussi à trois axes déterminés, rectangulaires entre eux : de sorte qu'en un point *quelconque* O d'un corps solide, il y a aussi trois axes principaux, c'est-à-dire dont chacun jouit de cette double propriété : 1° que si le corps tourne sur cet axe, et qu'on réduise toutes forces $\theta r dm$ à une seule P appliquée en O et à un seul couple, ce couple N est perpendiculaire à l'axe dont il s'agit ; 2° que, si l'on réduit de même les forces centrifuges $\theta^2 r dm$, le couple résultant χ est *nul de lui-même* : mais la résultante π n'est pas ici nulle, non plus que la force P, et le point fixe O est obligé de détruire cette force finie P, et de supporter la pression πdt.

60. Dans tous les cas, il suffit de connaître les trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps, et qu'on nomme les axes *naturels* de rotation. Car une fois qu'on a ces axes et les moments d'inertie A, B, C qui s'y rapportent, il est très-facile de

trouver l'expression du moment d'inertie du corps autour d'un autre axe mené comme on voudra par le même centre; et de là on peut passer, par une autre expression encore plus simple, au moment d'inertie relatif à un axe quelconque parallèle à celui-là. C'est une théorie purement géométrique que je développerai avec quelque détail dans le chapitre suivant.

Mais avant de terminer celui-ci, je veux dire deux mots de la rotation d'un corps sur un *axe fixe*, afin de montrer, d'une manière nette, 1° les *percussions* que cet axe doit ressentir, au premier instant, de la part des forces d'impulsion qui ont été appliquées au corps; 2° les *pressions* que cet axe devra soutenir, dans tout le cours du mouvement, pour résister aux forces centrifuges qui naissent à chaque instant de la rotation.

Enfin, revenant aux propriétés générales du mouvement d'un corps *entièrement libre*, je montrerai, dans un nouveau paragraphe, que le principe de la *conservation des forces* et le principe de la *conservation des couples* auraient pu être tirés, comme corollaires, de la théorie des forces centrifuges.

IV.

Du mouvement d'un corps autour d'un axe fixe.

61. Quelles que soient les forces appliquées à ce corps, on peut toujours les réduire à une seule R appliquée en un point quelconque O de l'axe fixe, et à un seul couple G.

Or il est évident que la force R passant par un point de l'axe fixe y est détruite, et que, par conséquent, cet axe OZ reçoit d'abord au point O une percussion représentée par la force donnée R; ou, si l'on veut, en nommant α l'inclinaison de R à OZ, cet axe fixe reçoit deux percussions, l'une $R \cos \alpha$ dans le sens de sa longueur, et l'autre $R \sin \alpha$ dans une direction perpendiculaire.

Ensuite, en désignant par ν l'inclinaison de l'axe du couple G au même axe fixe, on peut décomposer ce couple en deux : l'un $N = G \cos \nu$, perpendiculaire à l'axe fixe; l'autre $N' = G \sin \nu$, dans un plan conduit par cet axe. Or il est visible que ce dernier couple N'

se trouve détruit : de sorte que l'axe fixe doit encore ressentir la percussion d'un couple $N' = G \sin \nu$.

Ainsi, voilà deux percussions tout à fait inutiles au mouvement du corps, et qui ne peuvent qu'ébranler l'axe fixe : d'où l'on voit que si l'on n'a d'autre objet que de faire tourner le corps, en ménageant les appuis, il est bon de n'employer que des forces qui aient une résultante nulle, et ne donnent qu'un couple perpendiculaire à l'axe fixe.

Mais ce n est pas tout : car reste le couple $N = G \cos \nu$, d'où proviendra le mouvement du corps; et, quoique ce couple soit perpendiculaire à l'axe fixe lui-même, et paraisse ainsi ne plus devoir le frapper, il ne pourra pourtant faire tourner le corps sur cet axe sans y causer d'abord deux percussions du même genre que les premières; et c'est ce qu'on va voir avec clarté dans le problème qui suit.

PROBLÈME.

62. *On suppose qu'un corps en repos, mobile autour d'un axe fixe OZ, soit frappé par un couple* N *perpendiculaire à cet axe, et l'on demande : 1° la vitesse angulaire* θ *que doit prendre ce corps ; 2° la percussion que l'axe fixe doit recevoir au premier instant ; 3° la pression continuelle qu'il aura à supporter, dans le cours du mouvement, en vertu des forces centrifuges qui naissent de la rotation.*

FIG. 19. Soit prise, sur l'axe fixe OZ, à partir d'un point quelconque O, une ligne terminée ON qui représente à la fois l'axe et la grandeur du couple d'impulsion appliqué au corps.

Soient, à partir du même point O, et dans le plan perpendiculaire à OZ, deux lignes terminées OP et OK, qui représentent, l'une la force P, et l'autre le couple K, qui, combinés avec le couple donné N, seraient capables de faire tourner le corps sur OZ d'une manière *spontanée*, c'est-à-dire, même en supposant que cet axe fût libre, et par conséquent sans lui causer la moindre percussion.

Cela posé, j'imagine qu'on applique au corps la force P, et en même temps la force P′ égale et contraire; de plus, qu'on applique le couple K, et le couple K′ égal et contraire : il est clair que l'état du corps n'est pas changé. Mais actuellement, au lieu de voir ce corps

comme frappé par le seul couple donné N, je puis le considérer comme frappé à la fois par les trois couples N, K, K′ et les deux forces P et P′.

Or, par hypothèse, les couples N, K, et la force P, combinés ensemble, sont capables de faire tourner le corps sur l'axe OZ avec une vitesse angulaire $\theta = \frac{N}{\int r^2 dm}$, sans causer à cet état fixe la moindre percussion. Donc, 1° le corps prendra réellement cette rotation déterminée θ; car la force et le couple restants P′ et K′, passant tous deux par l'axe fixe, peuvent être regardés comme détruits par la résistance de cet axe. Donc, 2° cet axe fixe ressentira deux percussions représentées l'une par la force P′ appliquée au point O, l'autre par le couple K′, dont le plan passe par le même axe; et l'on aura, pour ces deux espèces de percussions :

$$P' = -P = -\theta\sqrt{(\int x\,dm)^2 + (\int y\,dm)^2},$$

$$K' = -K = -\theta\sqrt{(\int xz\,dm)^2 + (\int yz\,dm)^2}$$

Ce qu'il fallait d'abord trouver.

63. Si l'axe OZ, au lieu d'être fixe dans toute sa longueur, était simplement retenu par deux points fixes A et B, et qu'on voulût trouver les deux percussions individuelles ressenties par ces points, on décomposerait la force P en deux autres parallèles appliquées, l'une au point A, l'autre au point B; ensuite on changerait le couple K′ en un autre équivalent appliqué à angle droit sur AB; et, réduisant alors à une seule les deux forces qu'on trouverait en A, et de même à une seule les deux forces qui agiraient en B, on aurait les deux percussions individuelles que le couple proposé N produit au premier instant sur les deux points fixes A et B.

64. Il est évident que les percussions dont il s'agit ne sont ressenties par l'axe fixe qu'au premier instant : car une fois que l'axe a détruit la force P′ et le couple K′, le corps n'est plus sollicité au mouvement que par les couples N, K et la force P. Or ce système de forces étant capable de faire tourner *spontanément* sur OZ, c'est-à-dire quand bien même OZ ne serait pas fixe, il est manifeste que la résistance de cet axe n'a plus rien à détruire, et qu'il ne reçoit plus aucune percussion.

On voit, par là, que si l'on veut ménager le plus possible l'axe fixe de rotation, sans regarder à la dépense des forces, il faut appliquer des forces qui se réduisent d'elles-mêmes à la force P et au couple G résultant de N et K. Cet ensemble P et G, ou son équivalent P, N, K, feront tourner sur l'axe fixe sans lui causer aucune percussion. On peut se représenter que, dans le cas dont il s'agit, la chose se passe de cette manière : on peut voir le couple N comme étant employé à faire tourner sur l'axe, tandis que la force P et le couple K sont employés à soutenir cet axe, ou, si l'on veut, à détruire les deux percussions $-P$ et $-K$ qui lui viendraient du couple N, si ce couple agissait tout seul.

Ainsi, quand on veut ménager le plus possible la résistance de l'axe, il faut appliquer le système de forces représenté par N, P et K : mais si l'on veut ménager la dépense des forces, il faut appliquer le seul couple N; et alors l'axe reçoit deux percussions $-P$ et $-K$, qu'il est obligé de détruire.

65. Après la destruction du couple K′ et de la force P′ par l'axe fixe, le corps tend donc à tourner *librement* sur cet axe avec la vitesse angulaire θ. Mais de cette rotation naissent alors les forces centrifuges $\theta^2 r dm$, dont il faut examiner l'effet; ce qui est le troisième point de notre démonstration. Or il est évident que toutes ces forces étant dirigées vers l'axe fixe, y seront détruites à chaque instant : d'où je conclus d'abord que la rotation θ du corps sera uniforme; que, dans toute la suite du mouvement, l'axe fixe n'aura plus qu'à supporter les pressions dues aux forces centrifuges; et que cet axe devra être retenu dans tous les sens, pour résister à ces pressions qui changent continuellement de directions par le mouvement même du corps. Or on a vu que les forces centrifuges $\theta^2 r dm$ sont réductibles à une seule

$$\pi = \theta P = \theta^2 \sqrt{\left(\int x dm\right)^2 + \left(\int y dm\right)^2},$$

et à un seul couple

$$\chi = \theta K = \theta^2 \sqrt{\left(\int xz dm\right)^2 + \left(\int yz dm\right)^2};$$

de sorte que l'axe est chargé, à chaque instant dt, d'une pression $\pi . dt$ appliquée en O, et d'un couple $\chi . dt$ passant continuellement par cet

axe : pressions qu'on pourra réduire, comme ci-dessus, à deux forces appliquées aux points A et B si l'axe n'est retenu que par deux points fixes; etc., etc.

Remarque.

Dans le mouvement que je viens de considérer, il est bien clair que la force P et le couple G, dont le corps est à chaque instant animé, restent toujours les mêmes de grandeur et de position dans l'*intérieur* du corps. Les deux lignes OP et OG qui les représentent ne font, pour ainsi dire, que tourner avec le corps et du même mouvement angulaire θ, autour de l'axe fixe.

Si tout à coup cet axe devenait libre, et que le corps fût ainsi abandonné à lui-même, on sait, par les principes généraux de la Dynamique, que P et G seraient également conservés de grandeur et de position, non plus dans l'intérieur du corps, mais dans l'*espace absolu*. Or je veux faire voir ici que ces principes, qu'on peut nommer la *conservation des forces* et la *conservation des couples*, auraient pu être tirés, comme de simples corollaires, de la théorie des forces centrifuges : déduction délicate et qui me paraît assez curieuse pour n'être point omise dans un Mémoire de Mécanique rationnelle.

V.

Conservation des forces et conservation des couples dans le mouvement d'un corps libre.

De l'analyse exacte des forces centrifuges, on peut tirer ces deux belles conséquences : c'est que les forces centrifuges qui naissent du mouvement d'un corps ne peuvent jamais altérer ni la grandeur ni la direction des forces primitives d'impulsion qui ont mis le corps en mouvement. Je veux dire que si, à une époque quelconque, on vient à rechercher la résultante et le couple résultant des forces finies qui animent le corps à cette époque, on retrouvera la même force et le même couple, et situés dans les mêmes lieux de l'espace. Ces propriétés ne sont, il est vrai, qu'un corollaire de ce principe, ou de cette loi générale de la Dynamique, par laquelle les forces qui ani-

ment toutes les molécules d'un système *quelconque*, variable ou non, donnent toujours, relativement à un même point de l'espace, la même résultante R et le même couple résultant G, pourvu que le système soit abandonné à lui-même, c'est-à-dire considéré comme libre de tout obstacle et de toute force accélératrice étrangère. Ce principe général a même lieu, comme on le sait, lorsqu'il y a, entre les molécules du système, des forces quelconques d'attraction, pourvu que ces attractions soient réciproques de l'une à l'autre, c'est-à-dire deux à deux égales et contraires; car, dans ce cas, ces forces donneraient à part leur résultante et leur couple résultant tous deux nuls, et ne pourraient troubler ni la grandeur ni la position de R et G. Cette conservation a encore lieu, mais pour le couple G seulement, dans le cas particulier de forces accélératrices étrangères tendant toutes vers un même point fixe de l'espace, et lorsqu'on prend ce point fixe pour le centre auquel on rapporte tous les moments du système : car toutes ces forces accélératrices ne donnent que des couples nuls relativement à ce point, et le couple résultant G est encore conservé. Mais s'il y a d'autres forces étrangères que celles dont je viens de parler, ni la résultante R ni le couple résultant G ne se conserve plus dans le cours du mouvement. On peut voir, dans le premier Mémoire qui accompagne nos *Éléments de Statique*, la démonstration très-simple de ce principe général, qui n'est, au reste, lui-même qu'une conséquence naturelle de cette loi fondamentale du mouvement, qu'on appelle la *loi d'inertie*.

Dans notre exemple d'un corps solide libre, qui a reçu des impulsions quelconques, et qui demeure ensuite abandonné à lui-même, il paraît donc évident que la conservation de la force R et du couple G d'impulsion ne peut manquer d'avoir lieu : car on ne suppose aucune force accélératrice qui vienne de l'extérieur; et si l'on y considère des forces centrifuges, ce ne sont en quelque sorte que des forces *passives* provenant de la liaison mutuelle des molécules; et il est assez clair que de telles forces ne peuvent en rien altérer ni la résultante ni le couple résultant du système. Cependant, comme ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles sur le corps, il reste ici une certaine obscurité sur la conservation de la force R et du couple G, puisqu'il naît à chaque instant dt une force πdt et un

couple χdt qui ne sont point nuls d'eux-mêmes. Il n'est donc pas inutile d'entrer ici dans une explication plus complète, et de montrer comment cette force et ce couple, nés des forces centrifuges, ne peuvent jamais troubler ni la grandeur ni la position dans l'espace, de la résultante R et du couple résultant G. Et cela même nous paraît d'autant plus curieux à examiner, que non-seulement ces forces centrifuges ne troublent ni R ni G, mais qu'elles sont même nécessaires à leur conservation : de sorte que si, à chaque instant, on venait à détruire la force πdt et le couple χdt, R et G ne se conserveraient plus dans l'espace absolu.

Démonstration.

Quel que soit le mouvement d'un corps, nous avons vu que ce mouvement peut être considéré, à chaque instant dt, comme composé d'une rotation θ autour d'un certain axe déterminé ON, et d'une translation u parallèle à cet axe que nous avons nommé l'*axe spontané glissant*.

Soient donc P, K, N la force et les deux couples capables de cette rotation θ sur l'axe ON, et Q la force qui, appliquée au centre de gravité g, est capable de la translation u suivant la direction du même axe. FIG. 20.

En nommant m la masse du corps, et faisant $gO = a$, on aura

$$P = ma\theta \quad \text{et} \quad Q = mu,$$

comme on l'a dit plus haut.

Cela posé, au bout d'un instant dt, le corps sera descendu le long de ON, par un espace $OO' = u\,dt$, et en même temps il aura tourné autour de ON par un angle $\theta\,dt$. Supposons donc que dans ce mouvement il ait entraîné avec lui toutes les lignes OP, OK, ON, Og que l'on considère dans la figure. Il est clair qu'en vertu du premier mouvement, toutes ces lignes seront d'abord descendues dans les positions parallèles O'P', O'K', O'N', O'g'; et qu'en vertu du second, elles auront tourné ensemble d'un même angle $\theta\,dt$, pour venir dans les positions O'P'', O'K'', O'N', O'g'' : de manière que les extrémités P',

K′, g' auront décrit les arcs semblables

$$P'P'' = P\theta\,dt, \quad K'K'' = K\theta\,dt, \quad g'g'' = a\theta\,dt.$$

Mais, au bout de cet instant, il sera provenu des forces centrifuges : 1° une force $\pi\,dt = P\theta\,dt$, perpendiculaire à P′, et qui, composée avec P′, ramènera cette force à sa place en O′P′; 2° un couple $\chi\,dt = K\theta\,dt$, perpendiculaire à K′, et qui, composé avec K″, ramènera ce couple à sa place en O′K′. Donc, au bout d'un instant, les forces et les couples qui animent le corps seront représentés par les lignes O′P′, O′K′, O′N′ et g'Q′. Or je dis que cet ensemble de forces et de couples est exactement le même que celui qui a été considéré au commencement, c'est-à-dire qu'il peut être actuellement représenté par les mêmes lignes OP, OK, ON, gQ situées dans les mêmes lieux de l'espace absolu.

Et d'abord, la chose est évidente pour les deux couples représentés par les lignes O′K′, O′N′; car, suivant la propriété des couples, il est indifférent qu'ils soient représentés par ces deux lignes ou par les deux lignes OK, ON qui leur sont respectivement égales et parallèles. Restent donc les deux forces P′ et Q′, appliquées, l'une en O′, l'autre en g'', qu'il faut montrer être réductibles aux deux forces respectivement égales et parallèles P et Q, appliquées en O et en g. Or P′ peut être transportée parallèlement à elle-même de O′ en O, pourvu qu'on ajoute le couple (P, — P) appliqué sur $OO' = u\,dt$: de même Q′ peut être transportée de g'' en g', pourvu qu'on ajoute le couple (Q, — Q) au bras de levier $g'g'' = a\theta\,dt$. Mais il est clair que ces deux couples, qui sont parallèles et de sens contraires, ont des moments égaux : car à cause de $P = ma\theta$ et de $Q = mu$, le moment $P \times OO'$ du premier est $ma\theta.u\,dt$, et le moment $Q \times g'g''$ du second est $mu.a\theta\,dt$, ce qui revient au même : ainsi les deux couples (P, — P), (Q, — Q) se détruisent, et les deux forces P′ et Q′ sont ramenées aux deux forces P et Q.

Donc le système de forces et de couples qui animent le corps au bout d'un instant revient au même que celui qui l'animait au commencement de cet instant : d'où l'on peut conclure que cette conservation des forces et des couples a lieu dans toute la suite du temps; ce qui est le principe général qu'il s'agissait de démontrer.

On peut même voir comment la chose se passe d'un instant à l'autre. Car au bout d'un instant, le corps ayant changé de position dans l'espace, et les forces ayant gardé la leur, le corps ne s'y présente plus de la même manière, et son mouvement va changer, c'est-à-dire qu'il va se faire autour de quelque autre axe spontané glissant on. Mais comme ce mouvement sera dû au même système (P, K, N, Q), ce système est nécessairement réductible à un système semblable (p, k, n, q) capable de ce mouvement autour du nouvel axe on dont il s'agit. Or, par la même démonstration qui précède, ce second système serait aussi conservé durant un instant : donc puisqu'il est réductible au premier (P, K, N, Q), celui-ci se conserve de même, c'est-à-dire qu'il peut représenter les forces et les couples qui animent le corps, non-seulement au bout du *premier*, mais encore au bout du *second* instant, et ainsi de suite à l'infini : d'où l'on voit comment cette *conservation* des forces et des couples doit s'étendre à tout le cours du mouvement.

Et réciproquement, si l'on voulait partir de ce principe général (dont la démonstration directe est très-facile), on serait conduit, par une marche inverse, à reconnaître que, du mouvement même d'un corps solide, il doit nécessairement provenir de certaines forces infiniment petites, telles que, étant combinées à chaque instant avec les forces acquises, le principe de *conservation* dont il s'agit soit rigoureusement observé : et l'on retrouverait ainsi pour ces forces infiniment petites les mêmes expressions $\pi\,dt$, $\chi\,dt$, qu'on a tirées de la théorie des forces centrifuges. Au reste, il n'est pas surprenant qu'on arrive au même résultat par les deux méthodes, puisque l'une et l'autre partent également de cette loi fondamentale qu'on appelle la loi d'*inertie*.

CHAPITRE III.

SUR LA THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE [*].

I.

Des moments d'inertie d'un corps de figure quelconque autour de différents axes qui se croisent en un même point.

66. Soient, par le point ou centre que l'on considère, trois axes rectangulaires x, y, z auxquels on rapporte les différents points du corps; h une droite quelconque passant par l'origine, et faisant avec les axes x, y, z, trois angles α, β, γ : on se propose de trouver l'expression du moment d'inertie par rapport à cette droite d'inclinaison donnée sur les trois axes fixes des coordonnées x, y, z.

Ce moment d'inertie n'est autre chose que la somme des produits faits de chaque particule du corps par le carré de sa distance à l'axe que l'on considère. Ainsi, en nommant dm une de ces particules, r sa distance à la droite donnée h, on a, pour le moment d'inertie de cette particule, $r^2\,dm$, et pour le moment d'inertie du corps entier, $\int r^2\,dm$, en représentant par $\int r^2\,dm$ la somme de tous les produits semblables à $r^2\,dm$ qu'on peut former en considérant toutes les molécules du corps.

Or x, y, z étant les coordonnées d'une particule quelconque dm, et ∂ sa distance à l'origine, on aura

$$\partial^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

et pour la distance r de cette particule à l'axe donné h, on aura

$$r = \partial \sin \varphi,$$

[*] Ce chapitre ne fait pas essentiellement partie de notre Mémoire *Sur la rotation des corps*; c'est un petit Mémoire à part, que j'avais rédigé, il y a plus de trente ans, pour le *Journal de l'École Polytechnique*. Mais M. Liouville, à qui je l'ai communiqué, m'en a vivement demandé l'insertion dans le présent travail. J'ai cédé au désir de mon savant confrère, par la considération de l'intérêt que cet ancien opuscule inédit pourrait encore offrir à quelques lecteurs.

φ étant l'inclinaison mutuelle de δ et h; on a donc

$$r^2 = \delta^2 \sin^2 \varphi = \delta^2 (1 - \cos^2 \varphi),$$

et comme on a, par la géométrie,

$$\cos \varphi = \frac{x}{\delta} \cos \alpha + \frac{y}{\delta} \cos \beta + \frac{z}{\delta} \cos \gamma,$$

on trouvera en substituant (et observant que l'on a toujours $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$),

$$r^2 = \cos^2 \alpha (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta (x^2 + z^2) + \cos^2 \gamma (x^2 + y^2)$$
$$- 2 (\cos \alpha \cos \beta . xy + \cos \alpha \cos \gamma . xz + \cos \beta \cos \gamma . yz),$$

et, par conséquent, multipliant tout par dm, et mettant le signe $\int$,

$$\int r^2 dm = \cos^2 \alpha \int (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int (x^2 + z^2) dm + \cos^2 \gamma \int (x^2 + y^2) dm$$
$$- 2 (\cos \alpha \cos \beta \int xy\, dm + \cos \alpha \cos \gamma \int xz\, dm + \cos \beta \cos \gamma \int yz\, dm),$$

ce qui donne le moment d'inertie relatif à l'axe proposé, par les inclinaisons α, β, γ de cet axe sur les trois axes fixes donnés x, y, z, et par les six intégrales

$$\int (y^2 + z^2) dm, \quad \int (x^2 + z^2) dm, \quad \int (x^2 + y^2) dm,$$
$$\int xy\, dm, \quad \int xz\, dm, \quad \int yz\, dm,$$

relatives aux mêmes axes : intégrales qu'on peut regarder comme actuellement déterminées par la position connue du corps, et que je représenterai par les six constantes respectives

$$A, \quad B, \quad C, \quad l, \quad m, \quad n;$$

de sorte que, en désignant simplement par H le moment d'inertie $\int r^2 dm$ relatif à la droite h, on aura l'équation

$$H = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$
$$- 2 (l \cos \alpha \cos \beta + m \cos \alpha \cos \gamma + n \cos \beta \cos \gamma),$$

où A, B, C représentent les moments d'inertie relatifs aux axes des coordonnées x, y, z.

Du système des droites ou axes h, autour desquels le moment d'inertie du corps a toujours la même valeur H.

67. Si dans l'équation précédente on regarde H comme une constante donnée, et les angles α, β, γ comme variables, on aura évidemment l'équation de la surface conique formée par la suite des droites h autour desquelles le moment d'inertie du corps a toujours la même valeur H. Or il est facile de voir que c'est une surface conique du second ordre dont le sommet est à l'origine : mais, pour mieux reconnaître cette surface, je vais la rapporter aux coordonnées rectangles x, y, z.

Pour cela, je considère un quelconque de ses points pris sur la génératrice h, à une distance de l'origine marquée par

$$h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

il est évident qu'on a

$$\cos\alpha = \frac{x}{h}, \quad \cos\beta = \frac{y}{h}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{h},$$

et, si l'on substitue dans l'équation précédente, il vient, pour l'équation de la surface rapportée aux coordonnées x, y, z,

$$(H - A)x^2 + (H - B)y^2 + (H - C)z^2 + 2lxy + 2mxz + 2nyz = 0,$$

qui appartient évidemment à une surface conique du second ordre rapportée à son centre ou sommet comme origine des coordonnées.

68. Ainsi il y a toujours dans un corps de figure quelconque, et en un point quelconque du corps ou de l'espace, une suite d'axes autour desquels le moment d'inertie du corps a toujours une même valeur; et cette suite d'axes de moments égaux forme la surface d'un cône du second ordre.

Des axes principaux d'inertie.

69. On peut encore simplifier l'équation de la surface que je considère, en changeant les coordonnées actuelles en d'autres de même origine et aussi rectangulaires entre elles, et faisant disparaître dans

l'équation transformée les trois rectangles de ces nouvelles coordonnées. Cette transformation, comme on le sait par la géométrie analytique, est toujours possible; et l'équation de la surface ne contient plus alors que les trois carrés des coordonnées: elle est réduite à sa forme la plus simple, et la surface conique est rapportée, comme on dit, à son centre et à ses axes ou diamètres rectangulaires.

Si donc, dès le commencement, au lieu de prendre trois axes quelconques, on avait pris les trois diamètres dont je viens de parler, et qu'on eût cherché de même la surface formée par la suite des droites d'un même moment d'inertie H, on aurait trouvé exactement la même équation, et toute réduite à la forme la plus simple. Or, par rapport à trois axes quelconques, cette équation est, comme on l'a vu, de la forme

$$(\mathrm{H}-\mathrm{A})x^2+(\mathrm{H}-\mathrm{B})y^2+(\mathrm{H}-\mathrm{C})z^2+2(lxy+mxz+nyz)=0,$$

où A, B, C, l, m, n désignent les six intégrales $\int(y^2+z^2)\,dm$, $\int(x^2+z^2)\,dm$, etc., $\int xy\,dm$, etc., relatives aux axes que l'on considère. Mais puisque cette équation, rapportée aux trois diamètres particuliers dont il s'agit, ne doit plus contenir les rectangles xy, xz, yz des coordonnées, il s'ensuit que, relativement à ces mêmes diamètres, on aurait trouvé les intégrales l, m, n, c'est-à-dire $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, toutes trois égales à zéro.

70. Donc, par la même raison qu'il y a pour une surface conique du second ordre, trois axes rectangulaires par rapport auxquels les coefficients des trois rectangles xy, xz, yz sont nuls dans l'équation de cette surface, il y a dans un corps de figure quelconque, et en tel point de l'espace qu'on voudra considérer, trois axes rectangulaires par rapport auxquels les trois intégrales $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, relatives à ces axes, sont égales à zéro.

Et ces trois axes, qu'on nomme les *axes principaux* du corps, ne sont autre chose que les trois diamètres rectangulaires de la surface conique du second ordre formée autour de l'origine, comme sommet, par la suite des droites autour desquelles le corps a toujours le même moment d'inertie.

Comment on détermine les axes principaux.

71. On peut donc déterminer la position des trois axes principaux d'un corps, exactement comme on détermine celle des trois axes ou diamètres rectangulaires d'une surface du second ordre.

Ainsi on prendra l'équation générale de la surface conique dont je viens de parler, relativement à trois axes quelconques menés par le point que l'on considère. On cherchera les valeurs des six intégrales A, B, C, l, m, n relatives à ces axes; et l'on donnera à H une valeur quelconque qu'elle puisse avoir, telle que H = A, ou B, ou C, ou toute autre. Cela fait, on cherchera par la transformation ordinaire des coordonnées trois nouveaux axes de même origine, et par rapport auxquels l'équation devienne de la forme

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0.$$

et ces trois axes rectangulaires seront les trois axes principaux d'inertie dans le corps que l'on considère.

72. Dans une section conique plane, la recherche des deux axes dépend d'une équation du second degré: mais dans une surface du second ordre, la recherche des trois axes ou diamètres principaux dépend d'une équation du troisième degré. Ainsi l'on ne peut trouver, en général, les trois axes principaux d'inertie d'un corps de figure quelconque que par la résolution actuelle d'une équation du troisième degré, ou par la trisection de l'angle.

73. Mais si l'on connaît un de ces axes, on pourra trouver les deux autres par une équation du second degré ou par la bissection de l'angle.

Car soit z un axe pour lequel on ait m et n, c'est-à-dire $\int xz\,dm$ et $\int yz\,dm$, toutes deux nulles. L'équation de la surface conique se réduira à celle-ci:

$$(H - A)x^2 + (H - B)y^2 + (H - C)z^2 + 2lxy = 0.$$

Or, on peut trouver dans le plan xy deux nouveaux axes x' et y', aussi rectangulaires et pour lesquels le rectangle $x'y'$ des coordonnées

disparaisse de l'équation transformée. Si l'on désigne par ω l'inclinaison de x' à x, on a

$$x = x' \cos\omega - y' \sin\omega,$$
$$y = x' \sin\omega + y' \cos\omega,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation, on trouve pour le coefficient du rectangle $x'y'$,

$$(A - B)\, 2 \sin\omega \cos\omega + 2l(\cos^2\omega - \sin^2\omega),$$

ou bien

$$(A - B) \sin 2\omega + 2l \cos 2\omega,$$

lequel, étant égalé à zéro, nous donne, pour déterminer ω, l'équation très-simple

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{2l}{B - A}.$$

Ainsi, relativement aux trois axes x', y' et z qui sont rectangulaires entre eux, l'équation de la surface conique sera réduite à la forme

$$Px'^2 + Qy'^2 + Rz^2 = 0,$$

et ces trois axes seront ainsi les trois axes principaux du corps que l'on considère, de sorte qu'on aura

$$\int x'y'\,dm = 0, \quad \int x'z\,dm = 0, \quad \int y'z\,dm = 0.$$

On voit que les deux dernières équations s'accordent avec les deux qu'on avait supposées, savoir $\int xz\,dm = 0$, $\int yz\,dm = 0$: car par la forme des expressions ci-dessus de x et y, en x' et y', ou réciproquement, il est facile de voir que $\int x'z\,dm = 0$ et $\int y'z\,dm = 0$ entraînent les deux équations $\int xz\,dm = 0$ et $\int yz\,dm = 0$, et réciproquement; et cela même, indépendamment de l'inclinaison ω de x à x'.

Propriétés des trois axes principaux.

74. Si nous rapportons toutes les particules du corps aux trois axes *principaux*, nous aurons donc, en nommant toujours H le moment d'inertie relatif à une droite h menée par l'origine sous les angles α, β, γ avec ces mêmes axes,

$$H = A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma.$$

où A, B, C sont les valeurs des moments d'inertie du corps relatifs aux trois axes principaux.

75. De cette expression très-simple, il résulte d'abord que le moment d'inertie H sera toujours une quantité moyenne entre les moments principaux A, B, C. Car, supposez qu'on range ces trois quantités par ordre de grandeur, $A < B < C$; je dis que A est la plus petite valeur que puisse obtenir H, et que C est la plus grande.

En effet, à cause de

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on peut mettre l'expression précédente sous la forme

$$H = A + (B - A)\cos^2\beta + (C - A)\cos^2\gamma;$$

or $(B-A)$ et $(C-A)$ sont tous deux positifs par hypothèse; donc on a toujours

$$H > A.$$

Si l'on suppose que H passe à cette valeur *minimum* A, il vient

$$0 = (B - A)\cos^2\beta + (C - A)\cos^2\gamma,$$

équation qui ne peut subsister à moins qu'on n'ait

$$\cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0, \quad \text{et partant} \quad \cos\alpha = 1,$$

ce qui fait tomber h sur l'axe principal lui-même du moment A.

Ainsi, entre tous les axes qu'on peut mener par l'origine, l'axe du moment d'inertie *minimum* est unique, et c'est le premier axe principal.

Maintenant, si l'on met l'expression de H sous la forme

$$H = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta,$$

on voit de même que $(A - C)$ et $(B - C)$ sont tous deux négatifs par hypothèse; donc on a toujours $H < C$. Ainsi la valeur générale de H est toujours intermédiaire entre A et C, comme je l'avais avancé. Si l'on suppose que H arrive à cette valeur maximum C, il vient

$$0 = (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta,$$

équation qui ne peut subsister à moins qu'on n'ait

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0, \quad \text{et par conséquent}, \quad \cos\gamma = 1,$$

ce qui fait coïncider h avec l'axe principal du moment C.

Ainsi l'axe du moment d'inertie *maximum* est aussi un axe unique; et c'est le second axe principal du corps.

Enfin, si l'on met l'expression de H sous la forme

$$H = B + (A - B)\cos^2\alpha + (C - B)\cos^2\gamma,$$

on voit que $(A - B)$ étant négatif et $(C - B)$ positif, la valeur de H peut se trouver au-dessus ou au-dessous de B, selon que $(C - B)\cos^2\gamma$ sera plus grand ou plus petit que $(B - A)\cos^2\alpha$. Si l'on suppose que H prenne la valeur B, il vient

$$0 = (A - B)\cos^2\alpha + (C - B)\cos^2\gamma,$$

équation qui donne simplement, entre les angles α et γ, la condition

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{(B - A)}{(C - B)}},$$

ou bien, entre les coordonnées z et x d'un point quelconque pris sur la droite h, l'équation

$$\frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{(B - A)}{(C - B)}}.$$

Il y a donc une infinité d'axes du *moyen* moment d'inertie B; et l'on voit que tous ces axes forment deux plans conduits par l'axe principal des y ou du moment B, et faisant à droite et à gauche sur le plan xy deux angles égaux dont la tangente $\frac{z}{x}$ est $\sqrt{\frac{B - A}{C - B}}$.

Entre tous ces axes de même moment d'inertie B, il y en a un distingué de tous les autres; c'est celui qui est à la fois dans l'un et l'autre des deux plans dont je viens de parler, ou qui est à la fois perpendiculaire aux deux premiers axes principaux : c'est le troisième axe principal du corps.

Cet axe, comme on voit, ne jouit pas, comme les deux autres, d'une propriété de *maximum* ou de *minimum*. Il n'est pas un axe unique quant à la grandeur du moment d'inertie qui s'y rapporte,

mais il est unique quant à sa position particulière entre tous ceux du même moment d'inertie B.

Équation la plus simple de la surface conique formée par la suite des axes autour desquels le moment d'inertie du corps a la même valeur.

75. Relativement aux trois axes principaux x, y, z, la surface conique formée par la suite des axes h de même moment d'inertie H, a pour équation très-simple

$$(H - A)x^2 + (H - B)y^2 + (H - C)z^2 = 0,$$

où l'on vient de voir que si $A < B < C$, le moment H est toujours entre A et C.

Soit, en premier lieu, $H < B$.

Si l'on coupe la surface conique par un plan perpendiculaire à x et dont l'équation soit $x = a$, il vient, pour la section projetée dans toute sa grandeur sur le plan yz,

$$(H - B)y^2 + (H - C)z^2 = (A - H)a^2,$$

équation d'une ellipse, puisque $(H - B)$, $(H - C)$ et $(A - H)$ sont tous trois de même signe.

Ainsi tous les axes de moment d'inertie H égaux entre eux et inférieurs à B, forment la surface d'un cône droit à base elliptique autour de l'axe principal du moment d'inertie *minimum* A.

Soit, en second lieu, $H > B$.

On voit de même, en coupant la surface conique par un plan perpendiculaire à z, et dont l'équation soit $z = c$, que tous les axes de moments H égaux entre eux et supérieurs à B, forment la surface d'un cône droit à base elliptique, autour de l'axe z du moment d'inertie *maximum* C.

Enfin, si l'on suppose $H = B$, l'équation de la surface devient

$$(B - A)x^2 + (B - C)z^2 = 0,$$

qui donne

$$z = \pm x\sqrt{\frac{B - A}{C - B}},$$

ce qui répond à deux plans conduits par l'axe y du moyen moment

principal, et inclinés sur l'axe x du moment minimum d'un angle dont la tangente $\frac{z}{x}$ est $\sqrt{\frac{B-A}{C-B}}$, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a dit plus haut.

Ces deux plans, dans les quatre coins qu'ils forment autour de l'axe du moyen moment d'inertie B, comprennent toute la surface du corps, ou plus généralement comprennent tout l'espace. Dans les deux coins opposés au sommet où passe l'axe du moment *minimum* A, tous les axes menés à la surface ont des moments H inférieurs à B et supérieurs à A, qui est le plus petit de tous.

Dans les deux autres coins, où passe l'axe du moment *maximum* C, tous les axes menés du centre à la surface ont des moments H supérieurs à B et inférieurs à C, qui est le plus grand de tous.

Enfin, dans les plans mêmes qui forment les quatre coins, tous les axes ont des moments d'inertie égaux à B.

Si l'on avait, comme cela arrive dans les corps de révolution et dans une infinité d'autres, deux des trois moments d'inertie A, B, C, égaux entre eux, les surfaces coniques dont j'ai parlé seraient celles de cônes droits à base circulaire autour du troisième axe principal, et les deux autres plans se confondraient en un seul perpendiculaire au même axe : de sorte que tous les axes possibles menés dans ce plan seraient des axes principaux d'égal moment d'inertie.

Si l'on avait les trois moments d'inertie A, B, C égaux entre eux, comme dans la sphère et dans une infinité d'autres corps, tous les axes possibles seraient des axes principaux de même moment

76. De l'expression générale

$$H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

il résulte encore des conséquences faciles et très-importantes pour simplifier la considération du mouvement d'un corps de figure quelconque. On voit, en effet, par cette expression que si deux corps quelconques avaient les mêmes moments d'inertie A, B, C par rapport à leurs axes principaux x, y, z, ces deux corps auraient aussi le même moment d'inertie H par rapport à toute autre droite h faisant les mêmes angles α, β, γ avec les axes principaux. Donc quand on ne considère que les moments d'inertie, on peut toujours faire abstrac-

tion de la figure du corps, on plutôt on peut toujours la supposer réduite à celle de quelque corps plus régulier tel qu'un ellipsoïde, ou même un simple parallélipipède rectangle, qui aurait les mêmes moments principaux d'inertie.

Supposons, par exemple, deux corps libres qui auraient le même centre de gravité, les mêmes axes principaux et les mêmes moments d'inertie par rapport à tous les axes possibles menés par le centre. Et si deux couples de même grandeur et de même sens les frappaient à la fois, leur rotation, qui ne dépend à chaque instant que des moments d'inertie relatifs aux différents axes qui passent par le centre de gravité, serait exactement la même dans tout le cours du mouvement : de sorte que ces deux corps suivraient les mêmes rotations sans se nuire ou se favoriser en aucune manière. Ainsi le mouvement d'un corps irrégulier projeté d'une manière quelconque dans l'espace est le même que celui d'un simple rhomboïde rectangle, ou de l'assemblage de trois verges rectilignes qui se croisent à angles droits dans leurs milieux, ou de tout autre corps régulier qui aurait les mêmes moments principaux d'inertie. Par cette considération, on éclaircit le problème de la rotation des corps, en substituant une figure plus simple et plus facile à concevoir, comme dans le mouvement de translation on réduit le corps à un seul point qui est le centre de gravité.

Mais il y a encore une expression plus claire de tout ce qui regarde les moments d'inertie d'un corps, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet ouvrage.

En attendant, il faut montrer comment on peut trouver le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque, quand on connaît les axes, et les moments principaux d'inertie A, B, C, qui se rapportent au centre de gravité de ce corps.

77. Nous avons déjà vu que, pour un axe quelconque h qui passerait par le centre de gravité, le moment d'inertie H serait exprimé par la formule

$$H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

α, β, γ étant les inclinaisons de cet axe sur les trois axes principaux du corps. Or il est facile de trouver le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque h', par le moment d'inertie H autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité de ce corps.

Et, en effet, soit r' la distance d'une molécule dm du corps à l'axe h' que l'on considère, r sa distance à l'axe parallèle mené par le centre, et D la distance mutuelle de ces deux axes; on aura, dans le triangle formé par les trois lignes r', r et D,

$$r'^2 = r^2 + D^2 - 2Dr\cos\varphi,$$

φ étant l'inclinaison de r à D. On aura donc

$$\int r'^2\,dm = \int r^2\,dm + mD^2 - 2D\int dm\,.\,r\cos\varphi,$$

ou bien

$$H' = H + mD^2 - 2D\int dm\,.\,r\cos\varphi.$$

Mais $r\cos\varphi$ marque la distance de la molécule dm au plan qui serait mené par le centre de gravité perpendiculairement à la ligne D; on a donc, puisque ce plan passe par le centre, $\int dm\,.\,r\cos\varphi = 0$, et partant,

$$H' = H + mD^2:$$

c'est-à-dire que *le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe mené comme on voudra dans l'espace se trouve en prenant le moment d'inertie autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité, et y ajoutant le produit de la masse par le carré de la distance de ce centre à l'axe extérieur que l'on considère.*

78. On voit par là que les moments d'inertie d'un corps sont égaux pour tous les axes parallèles h' qui sont à égale distance D du centre de gravité de ce corps, ou qui forment la surface d'un cylindre droit et circulaire autour de ce centre.

Si l'on conçoit ce cylindre décrit, et qu'on le fasse tourner autour du même centre, dans une infinité de positions différentes, les moments d'inertie du corps relatifs aux génératrices h' auront bien la même valeur sur chaque cylindre, mais ils varieront de grandeur d'un cylindre à l'autre. Mais si l'on fait tourner le cylindre dont il s'agit de manière que son axe décrive la surface conique qui répond à l'équation

$$A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma = H = \text{constante},$$

les moments d'inertie du corps seront égaux par rapport à toutes les génératrices de cette infinité de cylindres.

Mais le système de toutes ces droites n'épuise pas encore l'infinité

des axes autour desquels le corps peut avoir un même moment d'inertie donné. Car si l'on fait varier à la fois H et D de manière que la somme $H + mD^2$ reste constante, on voit qu'on aura encore une infinité de systèmes d'axes tels que les précédents, et autour desquels le corps aura le même moment d'inertie.

Quand on ne considère que des axes qui se croisent en un même point quelconque O, tous les axes d'un moment d'inertie donné forment une surface conique du second ordre décrite autour de ce point. Quand on ne considère que des axes parallèles entre eux, tous les axes d'un moment d'inertie donné forment la surface d'un cylindre droit à base circulaire autour du centre de gravité du corps. Mais quand on regarde indistinctement tous les axes possibles de l'espace, il y en a une infinité d'infinités qui répondent au même moment d'inertie donné. Toutes ces droites, néanmoins, ne remplissent pas tout l'espace; car H′ étant donné, et H étant nécessairement compris entre le plus petit A et le plus grand C des trois moments principaux A, B, C, il est clair que la ligne D ne peut varier qu'entre certaines limites, qui sont

$$D = \sqrt{\frac{H' - C}{m}} \quad \text{et} \quad D' = \sqrt{\frac{H' - A}{m}}$$

Ainsi, en concevant autour du centre de gravité du corps deux sphères décrites des rayons D et D′, aucun des axes qui peuvent répondre au même moment d'inertie H′ ne peut entrer dans la sphère au rayon D, ni sortir de la sphère au rayon D′.

79. De cette relation simple

$$H' = H + mD^2$$

on tire encore cette conséquence : c'est que si, d'un point O pris sur l'un quelconque ga des trois axes principaux ga, gb, gc relatifs au centre de gravité g du corps, on mène des parallèles aux deux autres, ces deux droites Ob', Oc' seront avec la première Og les trois axes principaux du même corps par rapport au point O. Car Og étant axe principal relatif au centre g, l'est aussi au point O de sa direction; et, par conséquent, les deux autres axes sont dans le plan mené en O perpendiculairement à Og. Or, qu'on fasse mouvoir, autour de g et O, deux axes gh, Oh' parallèles entre eux et perpendiculaires à gO; la

distance D de ces deux axes étant alors constante, les variations des moments d'inertie H et H′ sont les mêmes. Ainsi H′ et H arrivent ensemble à leur *maximum* ou *minimum*. Mais, par hypothèse, H atteint cette valeur singulière quand gh se confond avec gc ou gb; donc H′ y arrive quand Oh' est parallèle à l'un ou à l'autre de ces axes. Donc, etc.

C'est d'ailleurs ce qu'on pourrait voir d'une manière directe en rapportant les molécules du corps à trois axes Ox', Oy', Oz' parallèles aux premiers gx, gy, gz : car, en nommant λ, μ, ν les trois coordonnées du point O, on trouve que les trois intégrales $\int x'y'\,dm$, $\int x'z'\,dm$ $\int y'z'\,dm$ se réduisent aux trois produits $m.\lambda\mu$, $m.\lambda\nu$, $m.\mu\nu$, et que, par conséquent, pour les rendre toutes trois nulles, il suffit d'égaler à zéro deux quelconques des trois coordonnées λ, μ, ν du point O, c'est-à-dire de prendre ce point sur l'un quelconque des axes principaux ga, gb, gc.

On voit même qu'en faisant nulle une seule de ces trois coordonnées, on rend nulles *deux* des trois intégrales dont il s'agit; d'où l'on conclut que tout axe parallèle à l'un des trois axes principaux relatifs au centre g, est lui-même un axe principal relatif au point O où il perce le plan des deux autres.

80. De la même relation

$$H' = H + mD^2$$

on tire encore la démonstration la plus simple d'un théorème assez curieux [*] qui peut être utile dans quelques applications.

En donnant, pour abréger, le simple nom d'*axes égaux* aux différents axes par rapport auxquels le corps a un égal moment d'inertie, on demande si, dans un corps quelconque, il pourrait y avoir quelque point ou centre O autour duquel tous les axes possibles seraient des axes égaux, comme il arrive dans la sphère, les corps réguliers, etc., relativement aux axes qui partent de leur centre.

Soient donc O un tel point s'il est possible, g le centre de gravité du corps : faisons la ligne $gO = D$, et menons au point O le plan MN perpendiculaire à cette ligne. Il est clair que tous les axes menés du

[*] Ce théorème est dû à M. Binet qui l'a donné, en 1811, dans un Mémoire présenté à la première classe de l'Institut.

point O dans ce plan sont des axes égaux, puisque cela même est vrai, par hypothèse, de tous les axes possibles émanés de ce point. Cela posé, tous les axes menés du centre de gravité g, dans un plan parallèle à MN, seront aussi des axes égaux entre eux, comme étant à la même distance D des premiers situés dans le plan MN.

Donc, en premier lieu, le point cherché O ne peut exister à moins que le corps n'ait deux de ses axes principaux, relatifs à son centre de gravité g, égaux entre eux; et si ce point O existe, il est situé sur la perpendiculaire gO au plan de ces deux axes égaux, et, par conséquent, sur la direction du troisième axe principal du corps. Pour le déterminer, soit A la commune valeur du moment d'inertie autour des deux premiers, et C le moment d'inertie autour du troisième gO : on aura, pour le moment d'inertie H′ autour des axes situés dans le plan MN,

$$H' = A + mD^2.$$

Mais H′ devant être le même pour tous les axes qui partent du point O dans tous les sens, doit être le même pour l'axe Og : or autour de cet axe le moment d'inertie du corps est C; il faut donc qu'on ait

$$H' = C, \quad \text{et par conséquent,} \quad C = A + mD^2:$$

d'où l'on tire, pour la distance D du point O au centre g,

$$D = \pm\sqrt{\frac{C - A}{m}},$$

double valeur qui n'est réelle que dans le cas de $C > A$.

Ainsi il ne peut y avoir dans un corps de centre O autour duquel tous les axes d'inertie soient égaux, à moins que le corps n'ait deux de ses axes naturels égaux entre eux, et que le moment d'inertie relatif au troisième ne surpasse celui qui se rapporte aux deux autres. Mais si ces conditions ont lieu, comme, par exemple, dans un sphéroïde homogène aplati vers les pôles, ce point singulier O existe réellement, et il y en a même deux de cette nature : ils sont situés sur l'axe naturel du plus grand moment d'inertie, l'un à gauche, l'autre à droite du centre de gravité, et à la même distance $D = \sqrt{\frac{C - A}{m}}$ de ce centre.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

SOLUTION DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS LIBRES.

I.

Définitions analytiques.

1. Soient O le point qui fait le centre de la rotation du corps; Ox, Oy, Oz les directions rectangulaires des trois *axes principaux;* et A, B, C les trois moments d'inertie de ce corps autour des mêmes axes.

On vient de voir que, si l'on considère un autre axe quelconque OI, on aura, en désignant par I la valeur du moment d'inertie qui s'y rapporte, l'expression

$$I = A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu,$$

où λ, μ, ν sont les inclinaisons respectives de l'axe OI aux trois axes principaux Ox, Oy, Oz.

2. Ce qu'on appelle le *moment d'inertie* d'un corps autour d'un axe quelconque, n'étant autre chose que la somme des produits de toutes les molécules dm de ce corps par les carrés de leurs distances r à cet axe, on peut toujours en représenter la valeur $\int r^2 dm$ par le simple produit $m.K^2$; en désignant par m la masse entière du corps, ou le nombre de toutes ses molécules supposées égales entre elles, et par K^2, le carré *moyen* entre tous les carrés des distances de ces molécules à l'axe dont il s'agit.

Le moment d'inertie du corps étant ainsi représenté par mK^2, c'est-à-dire comme le serait celui d'un point chargé de toute la masse et placé à une certaine distance K de l'axe que l'on considère, il serait très-naturel de nommer cette ligne K le *bras de levier* de l'inertie, ou simplement le *bras de l'inertie,* autour de cet axe : et c'est ce que nous ferons désormais pour simplifier le discours, où l'on aura soin

de se rappeler que cette ligne, nommée le *bras de l'inertie, n'est autre chose que le côté du carré moyen entre les carrés des distances de toutes les molécules égales du corps à l'axe que l'on considère.*

Ainsi, au lieu des lettres A, B, C qu'on emploie d'ordinaire pour désigner les trois moments d'inertie autour des axes principaux, je prendrai les expressions

$$m\alpha^2, \quad m\beta^2, \quad m\gamma^2:$$

m étant la masse du corps et les lignes α, β, γ les trois *bras* respectifs de l'inertie de ce corps autour des mêmes axes.

De l'ellipsoïde central des corps.

3. Dans le problème qui nous occupe, et où l'on suppose le corps libre de toute action étrangère, il suffit de connaître le point qui fait le centre de la rotation, les directions des trois axes principaux, et les trois bras de l'inertie du corps autour de ces axes. Le mouvement du corps, quelle que soit sa figure, ne dépend exactement que de ces données, et l'on peut faire abstraction de tout le reste.

Mais pour avoir sous les yeux une figure symétrique où l'on voie clairement toutes ces données du problème, j'imagine qu'autour du point O comme centre, et sur les droites Ox, Oy, Oz comme axes principaux, on décrive un ellipsoïde dont l'équation soit

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = R^2 = \textit{constante},$$

R étant une ligne quelconque qu'on pourra prendre à volonté.

Si l'on nomme a, b, c les demi-axes, ou *rayons principaux*, de cet ellipsoïde, de sorte que son équation prenne la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on aura, pour les valeurs de a, b, c,

$$a = \frac{R}{\alpha}, \quad b = \frac{R}{\beta}, \quad c = \frac{R}{\gamma}:$$

d'où l'on voit que les trois *axes principaux* de cet ellipsoïde sont *réciproques* aux trois *bras de l'inertie* du corps autour des mêmes

axes. Or, ce qui est très-remarquable, c'est que la même propriété s'étend à tous les diamètres, je veux dire que, dans cet ellipsoïde, un diamètre quelconque est réciproque au bras de l'inertie du corps autour de ce diamètre; et *vice versâ*. Ainsi, de même que le produit $m\frac{R^2}{a^2}$ exprime le moment d'inertie du corps autour de l'axe principal dont la demi-longueur est a, le produit $m\frac{R^2}{\delta}$ exprime le moment d'inertie autour d'un diamètre quelconque dont la demi-longueur est δ.

Soient, en effet, x', y', z' les trois coordonnées de l'un des bouts de ce diamètre; les fractions $\frac{x'}{\delta}$, $\frac{y'}{\delta}$, $\frac{z'}{\delta}$ seront les cosinus de ses inclinaisons aux trois axes principaux. Or, en désignant par $m\delta^2$ le moment d'inertie du corps autour de ce diamètre, on a, par la formule citée (n° 1),

$$m\delta^2 = m\frac{R^2}{a^2}\cdot\frac{x'^2}{\delta^2} + m\frac{R^2}{b^2}\cdot\frac{y'^2}{\delta^2} + m\frac{R^2}{c^2}\cdot\frac{z'^2}{\delta^2}$$

d'où l'on tire (à cause de $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$),

$$m\delta^2 = m\frac{R^2}{\delta} \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{R^2}{\delta};$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. L'ellipsoïde que je viens de définir jouit donc de cette propriété remarquable, qu'autour d'un quelconque de ses diamètres, le moment d'inertie du corps est réciproque au carré de ce diamètre : et c'est cet ellipsoïde, dont la considération va jeter le plus grand jour sur la théorie de la rotation des corps, que je nommerai désormais l'*ellipsoïde central*.

Quelles que soient la figure et la constitution du corps dont on étudie le mouvement, on va donc ici en faire entièrement abstraction, pour ne plus voir que celle de cet ellipsoïde central qu'on vient de lui inscrire, et qui a ce triple avantage de mettre à la fois sous nos yeux le *centre* et les *axes principaux* du corps; de nous donner tous les *moments d'inertie* qu'on pourrait avoir à considérer, en montrant chacun d'eux, autour d'un diamètre quelconque, comme exprimé par une même fonction simple de la longueur de ce diamètre; et enfin

de nous offrir, comme on le verra plus loin, l'expression la plus claire et la plus facile du théorème relatif à la position que prend l'axe instantané par rapport au plan du couple d'impulsion qui lui donne naissance.

La grandeur absolue de cet ellipsoïde n'est pas déterminée : car si les *bras de l'inertie* α, β, γ sont toujours donnés de longueur pour chaque corps, les *lignes réciproques* a, b, c ne sont ici données que de proportion, puisqu'elles dépendent de la ligne R qu'on voudra choisir. Ce qu'il y aurait de plus simple serait de la prendre égale à l'unité de ligne, et de poser tout de suite $R = 1$; car, dans nos équations, qui ne peuvent donner que des *rapports*, il est évident que R ne peut rester qu'en facteur commun à tous les termes, et, par conséquent, doit s'en aller d'elle-même comme si l'on avait fait tout d'abord $R = 1$. Mais je garde encore un moment cette indéterminée R pour l'homogénéité de nos expressions.

5. Cela posé, considérons un corps qui a reçu des impulsions quelconques que nous supposerons sur-le-champ réduites à une seule P appliquée au centre O, et à un seul couple G.

Si le corps est *forcé* de tourner sur un *point fixe*, on prendra ce point pour le centre O; si le corps est libre, on prendra le point O au centre de gravité du corps. Dans le premier cas, la force P sera immédiatement détruite par la résistance du point fixe, et il ne restera que l'effet du couple G à considérer. Dans le second cas, la force P appliquée au centre de gravité O ne produisant sur le corps qu'un pur mouvement de translation, toute la difficulté se réduira de même à trouver le mouvement de rotation qui provient du couple donné G. Voyons donc quelle est cette rotation au premier instant.

De la rotation du corps au premier instant.

Soit menée, par le centre O, une ligne G qui représente à la fois l'axe et la grandeur du couple appliqué. Si l'on projette cette ligne G sur les trois axes principaux du corps, les trois projections respectives L, M, N représenteront, pour leurs axes et pour leurs grandeurs, les trois couples dans lesquels se décompose le couple G autour des

mêmes axes. Or, chacun de ces couples étant perpendiculaire sur un *axe principal,* on a démontré que ce couple, s'il agissait seul, ferait tourner le corps sur cet axe lui-même, et avec une vitesse angulaire mesurée par la grandeur de ce couple divisée par le *moment d'inertie* du corps autour de cet axe principal. Les trois couples L, M, N tendent donc à faire tourner autour des trois axes principaux Ox, Oy, Oz avec des vitesses angulaires respectives p, q, r proportionnelles aux grandeurs L, M, N de ces couples et réciproques aux trois moments principaux d'inertie $m\frac{R^2}{a^2}$, $m\frac{R^2}{b^2}$, $m\frac{R^2}{c^2}$; de sorte qu'on a

$$p = \frac{La^2}{mR^2}, \quad q = \frac{Mb^2}{mR^2}, \quad r = \frac{Nc^2}{mR^2}.$$

Or ces trois rotations p, q, r se composent en une seule θ représentée, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale du rhomboïde rectangle construit sur les trois lignes qui représenteraient à la fois les axes et les grandeurs de ces trois rotations p, q, r.

6. Donc, au premier instant, le couple d'impulsion G tend à faire tourner le corps avec une vitesse angulaire θ exprimée par

$$\theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

et autour d'un axe dont les inclinaisons respectives aux trois axes principaux du corps ont pour cosinus

$$\frac{p}{\theta}, \quad \frac{q}{\theta}, \quad \frac{r}{\theta}.$$

Ainsi, en mettant dans ces expressions, au lieu de p, q, r leurs valeurs tirées des trois équations précédentes, on aura par les données L, M, N, l'axe et la grandeur de la rotation θ à laquelle le couple G donne naissance au premier instant, comme on l'a vu (1re partie, n° **47**).

7. Réciproquement, si l'on considère un corps qui tourne actuellement autour d'un axe avec une vitesse donnée θ, et qu'on cherche l'axe et la grandeur du couple inconnu G qui, appliqué au corps en repos, serait capable d'y produire la rotation actuelle qui l'anime, on décomposera cette rotation θ en trois autres p, q, r autour des trois

axes principaux du corps; et les mêmes équations précédentes, mais où l'on regarde maintenant p, q, r comme données, feront connaître les valeurs L, M, N des trois couples qui tendraient à produire ces trois rotations respectives : d'où il viendra, pour la grandeur du couple G qui produit la rotation donnée θ,

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

et, pour les trois cosinus de l'inclinaison de son axe aux trois axes du corps,

$$\frac{L}{G}, \quad \frac{M}{G}, \quad \frac{N}{G}.$$

8. Les rotations p, q, r autour des trois axes principaux du corps, étant en raison directe des couples L, M, N qui les produisent, et en raison inverse des moments d'inertie du corps autour des mêmes axes, et ces moments d'inertie étant en général inégaux, on voit que p, q, r ne sont pas proportionnelles à L, M, N, et que le rhomboïde rectangle où se composent les rotations n'est pas semblable au rhomboïde où se composent les couples : de sorte que les deux diagonales ont des directions différentes; et qu'ainsi l'axe instantané de la rotation n'est pas, en général, l'axe du couple qui la produit. Ces deux axes ne se confondent que dans le cas où l'axe du couple appliqué se trouve être un des axes principaux du corps. Dans tout autre cas, l'axe instantané est incliné à l'axe du couple, et il résulte des expressions précédentes qu'en désignant par i l'inclinaison mutuelle de ces deux axes, on a, par la formule connue,

$$\cos i = \frac{Lp + Mq + Nr}{G\theta}.$$

Mais voici, par la considération de notre *ellipsoïde central*, une expression bien plus claire de ce qui regarde la position relative du couple et de l'axe instantané dans l'intérieur du corps.

Expression nouvelle des théorèmes qui précèdent.

9. Considérons le point I où l'axe instantané va rencontrer la surface de l'ellipsoïde central, lequel point marque sur cette surface ce que nous nommerons désormais le *pôle instantané* de la rotation

Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées de ce pôle I, on aura pour le plan qui touche en I l'ellipsoïde, ou plutôt, pour le plan diamétral parallèle à ce plan tangent, l'équation

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Or, la direction de l'axe instantané OI n'étant autre chose que celle de la diagonale du rhomboïde rectangle construit sur les trois lignes qui représentent p, q, r, il est évident que les coordonnées x', y', z' du point I sont proportionnelles à p, q, r. Mais celles-ci, comme on l'a vu plus haut (n° 5), sont proportionnelles à La^2, Mb^2, Nc^2 : donc on peut mettre, à la place de x', y', z', ces trois dernières quantités ; et il vient, pour l'équation de ce plan parallèle au plan tangent,

$$Lx + My + Nz = 0.$$

Or il est évident que cette équation n'est autre chose que celle d'un plan perpendiculaire à la ligne G dont les trois projections sur les axes sont L, M, N ; et, par conséquent, c'est l'équation même du plan du couple.

Donc *l'axe instantané de la rotation due à un couple n'est autre chose que le diamètre conjugué au plan de ce couple dans l'ellipsoïde central du corps que l'on considère.*

Remarque.

10. Nous sommes arrivés à ce théorème par la considération de cet ellipsoïde central que j'ai d'abord défini et bien fait connaître : mais cette marche synthétique, quoique assez favorable à l'exposition, pourrait sembler indirecte, en ce qu'on ne voit pas bien ce qui a pu nous donner l'idée de cet ellipsoïde. Je veux donc, en passant, faire remarquer qu'on peut aussi trouver le théorème d'une manière directe, ce qui mène alors à la considération de notre ellipsoïde central ; et je dirai même que c'est par cette voie que j'en ai eu la première idée.

En effet, si l'on considère le couple G dont les trois composants autour des axes sont désignés, comme ci-dessus, par L, M, N, il est

évident que l'équation du plan de ce couple est

$$Lx + My + Nz = 0:$$

et que, par conséquent, si l'on met au lieu de L, M, N leurs valeurs Ap, Aq, Cr, cette équation devient

$$Apx + Bqy + Crz = 0.$$

Or, par la théorie des plans tangents, il est clair que cette équation est celle d'un plan parallèle à celui qui toucherait la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = F^2 = \textit{constante}.$$

au point dont les trois coordonnées x', y', z' seraient proportionnelles à p, q, r.

Mais la surface dont il s'agit est évidemment celle d'un ellipsoïde aux trois axes respectifs $F : \sqrt{A}$, $F : \sqrt{B}$, $F : \sqrt{C}$, et, par conséquent, de longueurs réciproques aux racines carrées des trois moments principaux d'inertie A, B, C; ou, ce qui revient au même, réciproques aux trois *bras* α, β, γ de l'inertie du corps autour des mêmes axes.

Donc le plan du couple n'est autre chose que le plan *conjugué* à la direction de l'axe instantané dans cet ellipsoïde, et réciproquement. D'où l'on voit qu'en dynamique, la considération de l'ellipsoïde central des corps est aussi naturelle que celle du centre de gravité

11. Comme un couple peut toujours être transporté dans un plan quelconque parallèle au sien sans que son effet sur le corps en soit changé, on peut toujours supposer que le plan du couple appliqué, au lieu d'être conduit par le centre, est mené tangentiellement à la surface de l'ellipsoïde central : et alors on peut dire :

Que si un corps est frappé par un couple dirigé dans un plan quelconque tangent à l'ellipsoïde central, le pôle instantané de la rotation à laquelle ce couple donne naissance, est précisément au point de contact.

Et réciproquement, *si le corps tourne, on peut dire que le couple actuel qui l'anime est dans le plan tangent au pôle;* ce qui nous

paraît un des théorèmes les plus simples et les plus élégants qu'on puisse offrir en dynamique sur la théorie si difficile et si obscure de la rotation des corps.

On voit toutes les conséquences claires et faciles qui découlent de cette lumineuse proposition : mais je ne veux point ici m'y arrêter; il faut que j'avance, et que, par le seul raisonnement, j'arrive de suite à la solution complète du problème qu'on se propose : car il ne s'agit pas seulement de déterminer la rotation du corps au premier instant, mais il faut voir comment cette rotation change d'un instant à l'autre, et peindre, pour ainsi dire, le mouvement du corps dans toute la suite de son cours.

De la rotation du corps dans toute la suite du temps.

12. Et d'abord il est bien clair que cet axe OI, qu'on appelle *instantané,* n'est, en effet, immobile qu'un instant : car de la rotation même θ autour de cet axe, il naît, pour toutes les molécules égales du corps, des forces centrifuges toutes proportionnelles aux rayons des cercles décrits, et dirigées suivant ces rayons. Or l'axe OI n'étant point, par hypothèse, un des axes principaux du corps, ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles : étant transportées parallèlement à elles-mêmes au centre O, elles donnent bien une résultante qui est nulle d'elle-même si ce point est le centre de gravité du corps, ou qui est détruite si ce centre O est un point fixe; mais leur couple résultant g n'est pas nul. Il provient donc de la rotation même du corps un couple accélérateur g dont l'effort $g\,dt$ pour un instant dt, imprime à ce corps une rotation infiniment petite $\gamma\,dt$, laquelle se compose avec la rotation actuelle θ, et fait varier l'axe et la grandeur de cette rotation.

13. Pour étudier le mouvement du corps, il faut donc commencer par chercher ce couple accélérateur qui naît des forces centrifuges dues à la rotation θ autour de l'axe instantané OI. Or on a démontré que l'axe de ce couple g est perpendiculaire à la fois à l'axe instantané et à l'axe du couple G qui produit la rotation actuelle θ; et que la grandeur de ce couple g est exprimée par $G\theta \sin i$, i étant l'incli-

naison mutuelle des deux axes G et θ; théorème qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Si l'on prend deux lignes dont l'une représente l'axe et la grandeur du couple d'impulsion, et l'autre l'axe et la grandeur de la rotation instantanée, le couple accélérateur dû aux forces centrifuges est toujours représenté, et pour son plan, et pour sa quantité, par la surface du parallélogramme construit sur les deux lignes que l'on considère.

14. De ce simple théorème on pourrait conclure le principe de la *conservation* du couple d'impulsion G dans toute la suite du mouvement du corps; et réciproquement, de ce principe on pourrait tirer la démonstration du théorème, comme on l'a vu (1re partie, chap. II, art. V).

Nous pourrions encore montrer en passant que ce théorème sur les forces centrifuges, si l'on veut le traduire en analyse, donne sur-le-champ les trois équations si élégantes qu'Euler a trouvées le premier pour la rotation des corps, mais qu'on ne démontre d'ordinaire que par de longs circuits de calculs et de trigonométrie. Mais nous reviendrons plus tard sur ces expressions analytiques : il faut ici reprendre et suivre le fil de notre raisonnement.

15. On vient de voir que le couple g, qui naît des forces centrifuges, est toujours situé dans le plan GOI de l'axe du couple d'impulsion G et de l'axe instantané de la rotation θ. Donc, par le théorème démontré plus haut (n° **9**), l'axe sur lequel ce couple g tend à faire tourner le corps n'est autre chose que le diamètre Oγ conjugué au plan GOI dans l'*ellipsoïde central*. Mais le diamètre conjugué à ce plan doit l'être à toutes les droites menées par son pied O dans ce plan, et, par conséquent, il est conjugué à l'axe OI : et de cela seul il résulte que ce diamètre Oγ est situé dans le plan même du couple d'impulsion G ; car, ce plan étant conjugué à l'axe instantané OI (n° **10**), il est le lieu de toutes les droites qui peuvent être conjuguées à OI.

Donc *l'axe* Oγ *de la rotation* γ *due au couple accélérateur* g *qui provient des forces centrifuges, est toujours situé dans le plan même du couple d'impulsion* G *dont le corps est actuellement animé.*

16. Donc, si l'on prend deux lignes, l'une θ qui représente la rotation actuelle, l'autre $O\gamma' = \gamma dt$ qui représente la rotation que le couple g fait naître en un instant dt, et que sur ces deux lignes on achève le parallélogramme, afin d'avoir dans la diagonale θ' la ligne qui représente l'axe et la grandeur de la rotation au bout d'un instant dt, on voit que l'extrémité de cette diagonale θ' est, au-dessus du plan du couple G, à la même hauteur que l'extrémité du côté θ; puisque le côté $O\gamma'$, étant dans le plan même de ce couple, le côté opposé du parallélogramme est parallèle à ce plan. Mais la hauteur de l'extrémité de la ligne θ, au-dessus du plan du couple, est évidemment exprimée par $\theta \cos i$: donc on a cette équation remarquable

$$\theta \cos i = \textit{constante},$$

c'est-à-dire que *la vitesse angulaire θ estimée autour de l'axe fixe du couple d'impulsion reste la même dans tout le cours du mouvement.*

17. De cette même équation résulte encore ce qu'on appelle le principe *des forces vives*. Car si $\theta \cos i$ est constante, comme G est aussi constant, on a

$$G\theta \cos i = \textit{constante}.$$

Or le facteur $G \cos i$, qui n'est autre chose que le couple G estimé autour de OI, est évidemment égal à $\theta . I$, en désignant par I le moment d'inertie du corps autour de l'axe instantané OI. On a donc

$$G\theta \cos i = \theta^2 . I = \textit{constante}.$$

Mais I désignant, par hypothèse, la somme des produits de toutes les molécules du corps par les carrés de leurs distances à l'axe de rotation, il est clair que $\theta^2 . I$ exprime la somme des produits de ces molécules par *les carrés de leurs vitesses ;* et comme chacun de ces produits se nomme la *force vive* de la molécule que l'on considère, on peut dire que *la somme des forces vives de toutes les molécules du corps demeure constante dans tout le cours de la rotation :* ce qui est ici, non pas un nouveau principe, mais un simple corollaire du principe de la *Conservation des couples,* ou *des aires,* quand ce principe est complétement exprimé ; c'est-à-dire, quand on exprime que G est invariable, non-seulement de *grandeur,* mais aussi de *position* dans l'espace absolu.

Je fais en passant cette remarque parce qu'elle intéresse la doctrine, et que, dans la théorie du mouvement d'un corps ou système *invariable de figure*, ce serait une faute de dire, comme on le fait quelquefois, que telle ou telle vérité dynamique se démontre par la *combinaison* du principe des aires avec le principe des forces vives : car, ce second principe étant ici essentiellement renfermé dans le premier, cette locution serait une preuve qu'on n'entend bien ni l'un ni l'autre. Mais poursuivons.

18. Si l'on nomme u le rayon vecteur OI qui va du centre au pôle instantané I sur la surface de l'ellipsoïde central, le moment d'inertie du corps autour de OI sera exprimé, comme on l'a vu, par $m\frac{R^2}{u^2}$. Mettant donc cette expression au lieu de I dans l'équation qui précède, on aura

$$m\frac{R}{u^2}\theta^2 = \textit{constante};$$

constante qu'on peut mettre sous la forme $\frac{mR^2}{k^2}$, en désignant par K une ligne constante. Et de là on tire l'équation

$$\frac{\theta}{u} = \frac{1}{k}.$$

D'où résulte ce nouveau théorème, que *dans tout le cours du mouvement la vitesse angulaire θ de la rotation est proportionnelle à la longueur même du rayon vecteur qui va du centre au pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde central.*

19. Donc, comme on a trouvé plus haut que $\theta \cos i$ est constante, on peut conclure que $u \cos i$ est aussi constante, et que, par conséquent, la hauteur $h = u \cos i$, du pôle I au-dessus du plan diamétral du couple G, est constante dans tout le cours de la rotation : ou bien, si l'on prend, comme il est permis, pour le plan du couple G, le plan parallèle *tangent* au pôle, on peut dire que *le plan du couple d'impulsion reste toujours à la même distance h du centre* O *de l'ellipsoïde.*

20. Mais ce centre est immobile dans l'espace absolu, et le plan

du couple reste toujours parallèle à lui-même : donc *ce plan, qui touche sans cesse l'ellipsoïde central au pôle instantané de rotation, est toujours un seul et même plan fixe dans l'espace absolu.*

Donc, le mouvement du corps, ou, ce qui est la même chose, le mouvement de l'ellipsoïde central est de telle nature, que cet ellipsoïde reste en contact avec un même plan fixe dans l'espace absolu ; qu'il tourne à chaque instant sur le rayon vecteur qui va du centre au point de contact, et qu'il tourne avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur même de ce rayon.

21. Cet ellipsoïde ne fait donc que rouler, sans *glisser*, sur le plan fixe que l'on considère : car, comme tout son mouvement consiste à tourner pendant un instant sur la ligne menée du centre au point de contact, l'ellipsoïde amène au bout de cet instant un nouveau point de sa surface en contact avec ce plan; et ce nouveau point, qui devient le pôle de la rotation pour l'instant suivant, reste à son tour immobile pendant cet instant, et ainsi de suite à l'infini; d'où il est manifeste qu'aucun de ces points par lesquels l'ellipsoïde vient se mettre en contact avec le plan fixe, ne peut jamais glisser sur ce même plan.

22. Telle est donc enfin l'idée claire et nouvelle qu'on peut se former du mouvement si compliqué et si obscur d'un corps de figure quelconque qui tourne librement, soit autour de son centre de gravité, soit autour d'un point fixe quelconque, en vertu d'un couple dont il a reçu primitivement l'impulsion dans tel plan donné qu'on voudra :

Considérez le centre de gravité du corps, ou, si le corps n'est pas libre, le point fixe qui fait le centre de sa rotation. Autour de ce point, et sur les directions des trois axes principaux d'inertie qui s'y rapportent, imaginez un ellipsoïde construit avec trois axes de longueurs réciproques aux BRAS DE L'INERTIE *du corps autour des mêmes axes; et faites maintenant abstraction de la figure du corps pour n'y plus voir que celle de cet ellipsoïde que j'ai nommé l'*ELLIPSOÏDE CENTRAL.

Si vous supposez que cet ellipsoïde, dont le centre est retenu immobile au même point de l'espace, roule sans glisser sur un plan fixe avec

lequel on l'a mis en contact, vous aurez la représentation exacte du mouvement géométrique que suit le corps en vertu du couple qui l'a frappé dans le plan fixe que l'on considère : et si vous ajoutez que la vitesse angulaire avec laquelle il tourne à chaque instant sur le rayon mené du centre au point de contact, est proportionnelle à la longueur même de ce rayon, vous aurez à la fois le mouvement géométrique et dynamique de ce corps ; c'est-à-dire que vous verrez avec clarté, non-seulement la suite continue des lieux que le corps doit venir occuper, mais encore la proportion des temps qu'il met à les parcourir ; ce qui est l'idée complète du mouvement du corps considéré dans le cours infini de sa rotation.

Réflexion générale.

23. Nous voilà donc conduits par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement. Car, si l'on se contente, comme on le fait d'ordinaire, de traduire les problèmes en équations, et qu'on s'en rapporte ensuite aux transformations du calcul pour mettre au jour la solution qu'on a en vue, on trouvera le plus souvent que cette solution est encore plus cachée dans ces symboles analytiques, qu'elle ne l'était dans la nature même de la question proposée. Ce n'est donc point dans le calcul que réside cet art qui nous fait découvrir ; mais dans cette considération attentive des choses, où l'esprit cherche avant tout à s'en faire une idée, en essayant, par l'analyse proprement dite, de les décomposer en d'autres plus simples, afin de les revoir ensuite comme si elles étaient formées par la réunion de ces choses simples dont il a une pleine connaissance. Ce n'est pas que les choses soient composées de cette manière, mais c'est notre seule manière de les voir, de nous en faire une idée, et partant de les connaître. Ainsi notre vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'analyse et de la synthèse, où le calcul n'est employé que comme un instrument. Instrument précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche ; mais qui n'a par lui-même

aucune vertu propre; qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger comme tout autre instrument.

Ce qui a pu faire illusion à quelques esprits sur cette espèce de force qu'ils supposent aux formules de l'analyse, c'est qu'on en retire, avec assez de facilité, des vérités déjà connues et qu'on y a, pour ainsi dire, soi-même introduites, et il semble alors que l'analyse nous donne ce qu'elle ne fait que nous rendre dans un autre langage. Quand un théorème est connu, on n'a qu'à l'exprimer par des équations; si le théorème est vrai, chacune d'elles ne peut manquer d'être exacte, aussi bien que les transformées qu'on en peut déduire : et si l'on arrive ainsi à quelque formule évidente, ou bien établie d'ailleurs, on n'a qu'à prendre cette expression comme un point de départ, à revenir sur ses pas, et le calcul seul paraît avoir conduit comme de lui-même au théorème dont il s'agit. Mais c'est en cela que le lecteur est trompé. Ainsi, pour prendre notre exemple dans la question même qui fait l'objet de ce Mémoire, il est bien clair qu'aujourd'hui rien ne serait plus aisé que de retrouver nos théorèmes dans les expressions analytiques d'Euler ou de Lagrange, et même de les en dégager avec un air de facilité qui ferait croire que ces formules devaient les produire spontanément. Cependant, comme ces idées ont échappé jusqu'ici à tant de géomètres qui ont transformé ces formules de tant de manières, il faut convenir que cette analyse ne les donnait point, puisque, pour les y voir, il aura fallu attendre qu'un autre y parvînt par une voie toute différente.

Nous aurions bien d'autres réflexions à faire, et de plus grands exemples à produire, si nous voulions montrer, d'une part, tout ce que l'esprit doit de lumière à cette méthode naturelle, telle que je l'ai définie plus haut et qui constitue notre véritable analyse, et de l'autre, le peu de vérités nouvelles qu'on a su tirer de ces formules analytiques où l'on croit enfermer une question, et quelquefois même une science tout entière. Sans doute, la science y est contenue, comme elle le serait dans tout autre principe énoncé en termes généraux; mais la difficulté reste de l'en faire sortir : et cette difficulté n'en devient-elle pas plus grande? Et, par exemple, ne faut-il pas bien connaître à la fois et la mécanique et les artifices de l'analyse, pour tirer de la seule formule générale des *vitesses virtuelles*, je ne dis pas

quelque nouveau théorème, ce dont je ne vois guère d'exemples), mais seulement les propositions particulières qui nous sont déjà le mieux connues? La traduction n'est-elle pas souvent plus difficile que le texte lui-même, je veux dire que la considération immédiate des choses que l'on veut étudier? L'illustre auteur qui a voulu transformer la mécanique en une question de calcul, a sans doute rempli son objet avec toute la clarté et toute l'élégance qu'on en pouvait attendre. Mais si la véritable analyse brille quelque part dans la *Mécanique analytique*, j'oserai dire que c'est bien moins dans ces calculs que l'auteur range avec tant d'ordre et de symétrie, que dans ces lumineux rapprochements qu'il indique entre les méthodes, et surtout dans ces admirables préfaces qu'il a placées à la tête des différents livres de son ouvrage, où il examine et discute les principes fondamentaux de la science, et fait l'histoire instructive du mouvement de l'esprit humain dans cette suite délicate d'idées fines et de solutions ingénieuses qui ont peu à peu formé la science de la Mécanique. C'est par là que ce bel ouvrage pourra servir aux progrès ultérieurs de l'esprit, en lui montrant la route qu'il a suivie, et qui est encore la route où il doit continuer de marcher. Car, encore une fois, gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. N'oublions point que les résultats de nos calculs ont presque toujours besoin d'être vérifiés, d'un autre côté, par quelque raisonnement simple, ou par l'expérience. Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que, sur ce point même, l'esprit n'ait plus rien à faire : mais, au contraire, il faut songer que, cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence; ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique.

Qu'on me pardonne ces réflexions que je fais, j'ose le dire, dans l'unique intérêt de la science. Je connais le caractère propre et distinctif de l'analyse algébrique, et je pourrais même dire avec précision en quoi cet art a pu perfectionner la logique ordinaire du dis-

cours : je sais tout ce que les bons esprits doivent au calcul; mais je tâche d'éclairer ceux qui se trompent sur la nature de cet instrument, et en même temps, de prévenir l'abus que d'autres en peuvent faire en profitant de cette illusion même. Car, sitôt qu'un auteur ingénieux a su parvenir à quelque vérité nouvelle, n'est-il pas à craindre que le calculateur le plus stérile ne s'empresse d'aller vite la rechercher dans ses formules, de la découvrir une seconde fois, et à sa manière, qu'il dit être la bonne et la véritable; de telle sorte qu'on ne s'en croie plus redevable qu'à son analyse, et que l'auteur lui-même, quelquefois peu exercé, ou même étranger à ce langage et à ces symboles sous lesquels on lui dérobe ses idées, ose à peine réclamer ce qui lui appartient, et se retire presque confus, comme s'il avait mal inventé ce qu'il a si bien découvert? Singulier artifice, que je n'ai pas besoin de caractériser davantage, mais qu'il est bon de signaler comme un des plus nuisibles aux progrès des sciences, parce qu'il est sans contredit un des plus propres à décourager les inventeurs!

Mais je n'étendrai pas plus loin ces réflexions générales; et si le peu que j'ai dit est assez sensible par les exemples qui précèdent, on le verra se confirmer encore par ceux qui pourront suivre.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE LA SOLUTION.

Dans cette image si claire que nous avons donnée de la rotation des corps, on voit sur-le-champ toutes les circonstances et toutes les variétés que ce mouvement peut offrir, et l'on est conduit, comme par la main, aux opérations et aux calculs qu'il faut faire, si l'on veut en mesurer toutes les différentes affections.

24. Et d'abord, cette suite de points par lesquels l'ellipsoïde central du corps vient se mettre en contact avec le plan fixe du couple d'impulsion, étant considérée sur la surface de l'ellipsoïde, y marque la route du pôle instantané dans l'intérieur du corps; et ces mêmes points étant considérés sur le plan fixe, y marquent sa route dans l'espace absolu. On peut donc déterminer sur-le-champ ces deux

lignes courbes; et, par conséquent, les considérer comme les bases de deux surfaces coniques de même sommet, dont l'une, mobile avec le corps, roulant sur l'autre qui est fixe dans l'espace absolu, donnerait à ce corps le mouvement précis qui l'anime.

I.

De la courbe décrite par le pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde central.

25. Pour trouver cette courbe, qui est à double courbure, et que je désignerai par s, il n'y a donc qu'à chercher la suite des points par lesquels un ellipsoïde, aux *rayons principaux* a, b, c, serait touché par un plan qui resterait toujours à une même distance donnée h du centre de cet ellipsoïde : ou, ce qui est la même chose, la suite des points de contact d'un plan qui se mouvrait en touchant à la fois cet ellipsoïde, et une sphère concentrique au rayon donné h. Or il est clair que cette courbe s est un orbe fermé, à double courbure, espece de *roue* elliptique, dont l'axe ou l'essieu est, ou le *rayon majeur* a de l'ellipsoïde central, ou le *rayon mineur* c, selon que le rayon h de la sphère est donné plus grand ou plus petit que le *rayon moyen* b de cet ellipsoïde.

26. C'est, au reste, ce qu'on peut voir par le calcul le plus simple, car l'équation de la surface de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

la distance du centre au plan tangent est exprimée par

$$1:\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}},$$

x, y, z désignant les coordonnées du point de contact. En égalant donc cette expression à la distance donnée h, on a cette seconde équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{h^2}, \tag{2}$$

d'où, en éliminant tour à tour, au moyen de la premiere, chacune

des trois coordonnées x, y, z, on tire les équations suivantes :

$$\frac{b^2-a^2}{b^2}y^2+\frac{c^2-a^2}{c^2}z^2=\frac{h^2-a^2}{h^2},$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+\frac{c^2-b^2}{c^2}z^2=\frac{h^2-b^2}{h^2},$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2=\frac{h^2-c^2}{h^2},$$

qui donnent les projections de la courbe sur les trois plans principaux.

Or, a, b, c étant toujours supposés rangés dans cet ordre de grandeur

$$a > b > c,$$

et h étant une ligne toujours intermédiaire entre les deux rayons extrêmes a et c, il est visible que si h est $> b$, la courbe s donne une ellipse sur le plan principal perpendiculaire au rayon *majeur* a; et que, si h est $< b$, elle donne une ellipse sur le plan perpendiculaire au rayon *mineur* c.

27. En général, on voit que cet orbe à double courbure se projette en une ellipse *entière* sur l'un des deux plans perpendiculaires aux axes *extrêmes* a et c de l'ellipsoïde central, en un *arc* d'ellipse sur l'autre plan; et toujours en un *arc d'hyperbole* sur le plan perpendiculaire à l'axe *moyen* b.

28. Dans le cas singulier de $h=b$, la courbe devient *plane;* c'est une ellipse dont le demi-petit axe est le rayon *moyen* b de l'ellipsoïde, et le demi-grand axe une ligne β dont la valeur est $\sqrt{a^2+c^2-\frac{a^2c^2}{b^2}}$

29. Et enfin, dans les deux cas particuliers de $h=a$ et de $h=c$, la courbe se réduit à un point qui est ou le pôle A ou le pôle C de l'ellipsoïde central.

30. On pourrait remarquer que la courbe s est en quelque sorte *double;* car, tandis que le pôle instantané I décrit cette courbe s, il est évident que le pôle opposé I′ en décrit une autre s' parfaitement

égale dans l'autre partie de l'ellipsoïde; mais il suffit d'en considérer une seule.

31. On voit que cette courbe à double courbure a, comme une ellipse, quatre sommets principaux où elle est divisée en quatre parties égales et symétriques, et il est évident que ces sommets sont les quatre points où la courbe traverse les deux plans principaux conduits par l'axe qui lui sert comme d'essieu : c'est en ces points que le rayon vecteur OI atteint ses valeurs *maxima* ou *minima*, comme il est facile de le voir en cherchant le maximum de l'expression

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

où les variables x, y, z sont liées par les équations précédentes (1) et (2).

II.

De la courbe décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu.

32. La courbe s que le pôle instantané I de la rotation trace à la surface de l'ellipsoïde central, étant ainsi déterminée, il est facile de trouver la courbe σ que le pôle instantané décrit sur le plan fixe. Car, en considérant l'orbe fermé s comme la base d'une surface conique dont le sommet est au centre O de l'ellipsoïde, il est clair que, pendant le mouvement du corps, ce cône tourne sans cesse autour de sa génératrice OI en appuyant le contour de sa base sur le plan fixe, et qu'ainsi ce contour s y trace en roulant la courbe plane σ que le pôle instantané décrit dans l'espace absolu. Les arcs infiniment petits $d\sigma$ de cette courbe plane sont donc parfaitement égaux aux arcs successifs ds de cette roue mobile s qui les produit : de sorte que si l'on a l'équation de celle-ci entre la longueur s de son arc et son rayon vecteur u, il suffit d'y changer s en σ pour avoir l'équation de la courbe σ entre son arc σ et le même rayon u émané du centre O de l'ellipsoïde.

33. Mais comme cette courbe σ est plane, si l'on aime mieux la rapporter à des rayons vecteurs v émanés d'un point pris dans le plan même de la courbe, on peut choisir, pour ce nouveau centre, le pied P de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur

le plan fixe que l'on considère; et alors il suffit de changer u en $\sqrt{h^2 + v^2}$ dans l'équation dont il s'agit.

34. Le rayon vecteur v de la courbe plane σ n'étant autre chose que la projection continuelle du rayon u de la roue s dont les éléments ds viennent s'appliquer l'un après l'autre sur le plan pour former les éléments égaux $d\sigma$ de la courbe plane σ, il est clair que le rayon v va, comme le rayon u, d'un *maximum* à un *minimum;* de ce *minimum* à un *maximum* suivant, parfaitement égal au premier; et ainsi de suite à l'infini : et cela par des intervalles ou longueurs d'arcs σ parfaitement égaux entre eux, et au quart de la génératrice s.

On voit donc que *la courbe σ décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu, est une courbe plane régulièrement ondulée autour d'un même centre; c'est-à-dire une courbe formée par une suite d'ondes égales et régulières, dont les sommets sont équidistants, et qui serpente à l'infini entre deux cercles concentriques dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférence.*

35. Si l'angle au centre, qui répond à deux sommets consécutifs supérieurs ou inférieurs, de la courbe ondulée σ, est commensurable avec quatre angles droits, et qu'on désigne par n le plus petit nombre entier de cercles que cet angle ou ce secteur mesure, la courbe σ se fermera; et le pôle qui la décrit reprendra exactement sa première route après avoir fait n fois le tour entier de l'espace angulaire.

Mais, comme l'intervalle de deux sommets consécutifs de même nom ne répond qu'à une moitié de l'orbe mobile s, il est clair qu'il faut doubler ce nombre de révolutions si l'on veut que le pôle instantané se retrouve, non-seulement au même lieu dans l'espace absolu, mais encore au même lieu sur la surface de l'ellipsoïde central.

36. Si l'angle dont il s'agit n'est pas commensurable avec quatre angles droits, la courbe ondulée σ ira à l'infini sans pouvoir jamais se fermer; et le pôle instantané, qui reviendra toujours périodiquement au même lieu dans le corps, ne pourra jamais retomber en même temps au même lieu dans l'espace.

37. Telles sont, en général, les deux courbes décrites par le pôle instantané, l'une dans l'intérieur du corps, et l'autre dans l'espace

absolu. Et quoique ces courbes soient de formes si différentes, comme c'est un seul et même point qui décrit à la fois l'une et l'autre, leurs équations prises entre le rayon vecteur émané du centre O, et la longueur de l'arc décrit, sont exactement une seule et même équation.

Le *cône roulant*, à la surface duquel la première courbe s sert de base, est simplement *un cône droit du second degré;* mais le *cône fixe* sur lequel il roule est un *cône transcendant* dont la surface ondule à l'infini autour de l'axe fixe du couple; c'est aussi une espèce de cône droit et circulaire, mais dont la surface serait, pour ainsi dire, *cannelée* suivant le contour régulièrement ondulé de la courbe σ qui lui sert de base.

III.

Des variétés que les deux courbes s et σ peuvent offrir dans certains cas particuliers.

38. Ces deux courbes ne dépendent, comme on voit, que de quatre données, savoir : les trois demi-axes ou *rayons principaux* a, b, c de l'ellipsoïde central, lesquels sont toujours donnés par la nature du corps; et ensuite la *hauteur* h du centre au-dessus du plan tangent du couple, laquelle est donnée par la direction du couple d'impulsion.

Les variétés que ces deux courbes peuvent offrir, pour un même corps, ne dépendent donc que des valeurs particulières qu'on peut donner à la ligne constante h.

Or cette ligne étant la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un de ses plans *tangents*, est nécessairement *intermédiaire* entre le plus grand et le plus petit rayon de cet ellipsoïde; de sorte que les trois rayons principaux a, b, c étant, comme on l'a dit, rangés dans cet ordre de grandeur

$$a > b > c,$$

on ne peut avoir à distinguer que deux cas généraux, savoir, h compris entre a et b, et h entre b et c; ensuite deux cas particuliers, savoir, $h = a$, $h = c$, et enfin, un cas que je nommerai *singulier* et qui est celui de $h =$ *au rayon moyen* b.

Dans les deux cas généraux, les courbes s et σ sont celles qu'on vient de décrire.

Dans les deux cas particuliers de $h = a$, $h = c$, chacune d'elles se réduit à *un point* qui est, ou le pôle A, ou le pôle C de l'ellipsoïde; et le corps tourne uniformément autour de l'un ou de l'autre des deux axes principaux $2a$ ou $2c$, lequel axe demeure immobile dans l'espace absolu, aussi bien que celui du couple G avec lequel il se confond dans toute la suite du mouvement.

39. Mais dans le *cas singulier* de h égal au rayon *moyen* b de l'ellipsoïde central, la courbe s ne se réduit pas à un point; car, sur la surface de l'ellipsoïde, outre le pôle moyen B, où le plan tangent est à une distance $h = b$ du centre O, il y a une infinité d'autres points où le plan tangent peut se trouver à cette même distance b du centre de cet ellipsoïde, et la suite de ces points forme deux ellipses égales, dont les plans se croisent suivant l'*axe moyen* $2b$, et sont inclinés au plan principal (ab) d'un angle dont la tangente est $\pm \frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$; de sorte que ces deux ellipses, qui ont, pour leur commun petit axe, la ligne $2b$, ont pour leur grand axe une ligne

$$2\beta = 2\sqrt{ac^2 + c^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}};$$

c'est ce qui se voit sur-le-champ par les équations de l'orbe s, en y supposant $h = b$.

40. Dans ce cas singulier de $h = b$, la courbe σ est donc produite par le mouvement de l'une s de ces deux ellipses, dont on retiendrait le centre immobile en O, à une hauteur b au-dessus du plan fixe, et dont on ferait rouler la circonférence sur ce plan, avec lequel on l'aurait mise en contact. Or il est aisé de voir que, dans ce cas, la courbe σ décrite par le point de contact est une ligne *spirale* qui va en tournant autour du centre P, et s'en rapproche sans cesse, de plus près que tout ce qu'on voudra, comme d'un point asymptotique, sans pouvoir jamais l'atteindre. Cette spirale, considérée dans toute son étendue, est une courbe symétrique à gauche et à droite d'un certain point qui la divise en deux parties parfaitement égales. Car, en reve-

nant sur ses pas, en faisant rouler l'ellipse en sens contraire, le rayon vecteur v revient en augmentant jusqu'à une certaine valeur

$$v = \sqrt{\beta^2 - b^2}.$$

qui est son *maximum;* après quoi il diminue par les mêmes degrés, de sorte que son extrémité I décrit de l'autre côté une spirale parfaitement égale à la première, et qui fait comme la moitié de la courbe entière et continue σ dont il s'agit. Cette courbe a donc un *sommet*, à gauche et à droite duquel elle jette deux branches égales qui vont en sens contraires tourner en spirales autour d'un seul et même centre P; et quoique chacune de ses branches fasse un nombre infini de révolutions autour de ce centre sans jamais l'atteindre, la longueur totale de la courbe est *finie* et parfaitement égale à la demi-circonférence de l'ellipse roulante qui la produit.

Le pôle I, qui décrit cette spirale de longueur finie, ne peut jamais la parcourir dans toute son étendue : quelque près qu'on le suppose déjà du centre P, dont il s'approche, il lui faut encore un temps infini pour achever le petit arc qui reste à décrire, ou, pour parler exactement, il ne pourra jamais l'achever.

Dans ce cas singulier du mouvement des corps, le pôle instantané de la rotation est donc un point toujours nouveau, et dans le corps, et dans l'espace absolu; je veux dire que, dans le cours infini de la rotation, le pôle ne peut jamais revenir au même lieu, ni dans le corps ni dans l'espace, quoiqu'il ne décrive qu'une ligne finie, et dont la longueur serait tout au plus égale à la demi-circonférence de l'ellipse, en supposant le temps infini, non-seulement avant, mais encore après l'époque que l'on considère.

Tel est donc le mouvement du pôle quand on suppose $h = b$, c'est-à-dire quand le plan du couple appliqué touche l'ellipsoïde central en un point qui appartient à l'une ou à l'autre de ces deux ellipses singulières dont nous venons de parler.

41. Mais s'il arrivait que le plan touchât précisément au pôle moyen B où se croisent ces deux ellipses, le pôle I, qui se confondrait alors avec B et le centre fixe P, resterait parfaitement immobile, et le corps ne cesserait de tourner uniformément autour de l'axe

moyen OB, comme il ferait autour de l'axe majeur OA, ou de l'axe mineur OC, si le plan du couple était tangent au pôle A, ou au pôle C de l'ellipsoïde. En effet, il n'y aurait aucune raison pour que le pôle I, qui ne peut décrire à la surface que l'une des deux ellipses dont on vient de parler, et qui tombe en ce moment à l'extrémité B de leur axe commun, décrivît l'une plutôt que l'autre de ces deux ellipses parfaitement égales et symétriques; d'où l'on voit qu'à la rigueur l'axe *moyen* de l'ellipsoïde central est, comme les deux autres, un axe permanent de rotation.

42. Mais il y a cette différence, c'est que, autour de cet axe moyen, la rotation n'a point de *stabilité* : je veux dire que, pour peu que le pôle I, en vertu d'un petit couple étranger appliqué au corps, vienne à s'écarter du pôle moyen B, il tendra à s'en écarter davantage; s'en allant alors décrire, à la surface, un orbe elliptique s, soit autour du grand axe, soit autour du petit axe, selon que ce déplacement accidentel du pôle aura fait augmenter ou diminuer la distance h du plan tangent: et si le déplacement est tel, que h n'ait pas varié de grandeur, le pôle ira décrire l'une ou l'autre de ces deux ellipses singulières que nous avons considérées.

43. Il n'y a qu'un seul cas où le pôle I, étant écarté du pôle moyen B de l'ellipsoïde, tendrait à y revenir: c'est le cas où le pôle I serait porté sur la circonférence de l'une de ces deux ellipses du côté précis où le *sens* de la rotation tend à le ramener vers B.

S'il est porté sur la même ellipse, mais de l'autre côté de son sommet B, il s'éloignera indéfiniment de ce pôle moyen B, et il ira tomber après un temps infini sur le pôle opposé B′ de l'ellipsoïde. Ainsi dans ce cas, qui est unique comme le précédent, l'ellipsoïde, qui, au commencement, touchait le plan fixe par son pôle moyen B, le toucherait à la fin par le pôle moyen opposé B′; de sorte que la position du corps se trouverait entièrement renversée dans l'espace. C'est le plus grand dérangement que l'impulsion d'un petit couple étranger puisse amener dans la position d'un corps qui tourne actuellement sur son axe moyen. Car, si le pôle est déplacé de toute autre manière sur la surface de l'ellipsoïde, il va décrire, comme on l'a vu, un orbe fermé s, soit autour du grand axe, soit autour du petit axe; et, par conséquent,

s'il s'écarte d'abord du pôle moyen B, il s'en rapproche ensuite, et revient périodiquement passer à la même distance de B sur la surface, et à la même distance du centre fixe P, dans l'espace absolu.

44. Il y a encore une autre variété de la courbe σ que le pôle instantané peut décrire dans l'espace ; mais elle n'est plus relative à la position du couple appliqué sur le corps, ou à la valeur particulière qu'on suppose à la ligne donnée h; elle dépend uniquement de l'espèce de ce corps, c'est-à-dire de la proportion des axes a, b, c de l'ellipsoïde central.

45. Si le corps est un de ceux qui ont deux de leurs trois moments principaux d'inertie égaux, il est alors de révolution, ou ce qu'on appelle un *sphéroïde*: sphéroïde *allongé*, si l'axe de révolution est plus grand que le diamètre de l'équateur; ou *aplati* vers les pôles, si cet axe est plus petit. Dans l'un et l'autre cas, il est évident que la route s du pôle, à la surface du sphéroïde, est un cercle autour de l'axe de ce sphéroïde; et, par conséquent, la route σ du pôle sur le plan fixe est aussi un cercle autour de l'axe du couple qui a mis le corps en mouvement. C'est un des cas les plus simples de la rotation des corps, parce que tout y est circulaire et uniforme. Cependant il faut encore remarquer que, si la circonférence du cercle roulant s n'est pas commensurable avec celle du cercle fixe σ, le pôle instantané ne peut jamais revenir au même lieu dans le corps et dans l'espace tout à la fois.

46. Enfin, et c'est ici le cas le plus simple de tous, si les trois moments d'inertie sont égaux, l'ellipsoïde central devient une sphère parfaite, l'axe instantané de rotation se confond avec l'axe même du couple appliqué, les deux courbes s et σ se réduisent à deux points qui n'en font qu'un seul, et le pôle instantané I reste immobile, et dans le corps, et dans l'espace absolu.

IV.

De ce qui fait la mesure de la stabilité pour chacun des deux axes extrêmes de l'ellipsoïde central.

47. Nous avons déjà remarqué (n° **42**), ce qui distingue l'axe *moyen*

des deux axes *extrêmes*, sous le point de vue de la stabilité que ces deux axes peuvent offrir dans la rotation des corps. Mais pour nous faire une idée nette de cette stabilité, et de ce qui en fait en quelque sorte la *mesure*, imaginons la surface de l'ellipsoïde central comme coupée en quatre parties ou fuseaux elliptiques par les deux ellipses singulières que nous avons considérées, et dont les deux plans, conduits par l'axe moyen $2b$, sont également inclinés à l'axe majeur $2a$ (l'un au-dessus, l'autre au-dessous) d'un angle o dont la tangente est $\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ (n° **39**). Le pôle *moyen* B de l'ellipsoïde est donc à l'intersection de ces deux ellipses; le pôle *majeur* A est au centre du fuseau dont l'ouverture est $2o$, et le pôle *mineur* C au centre du fuseau supplémentaire.

Or, en premier lieu, si le pôle instantané I de la rotation tombe sur le pôle *moyen* B de l'ellipsoïde, il est clair que, pour peu qu'on le déplace, il va tomber dans l'un ou l'autre des deux fuseaux dont il s'agit, et décrire son orbe s autour de l'un ou de l'autre pôle principal de l'ellipsoïde. Ou bien, si on le déplaçait sur le contour même de l'une des deux ellipses, il irait décrire la moitié de cette ellipse pour retomber sur le pôle moyen opposé; ou, s'il était porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il reviendrait aussitôt au pôle moyen même d'où on l'aurait écarté: d'où il résulte, comme on l'a dit ci-dessus, que, hors de ce cas unique de déplacement, l'axe *moyen* du corps n'a aucune stabilité.

Mais si le pôle instantané tombe actuellement au pôle *majeur* A de l'ellipsoïde, il peut être déplacé comme on voudra, dans toute l'étendue du fuseau environnant, sans cesser de décrire son orbe s autour du même pôle *majeur*. Et si c'est en cela qu'on fait consister la stabilité de la rotation autour de l'axe majeur, on peut dire que la grandeur de ce fuseau en est en quelque sorte la mesure. Et l'on voit de même que l'étendue du fuseau supplémentaire est la mesure de la stabilité de la rotation autour de l'axe *mineur*.

48. Actuellement, si l'on suppose que l'un de ces deux axes, tel que a, diffère peu de l'axe moyen, le fuseau qui lui répond est très-petit, et le fuseau supplémentaire est très-grand. L'axe peu différent

de l'axe moyen a donc très-peu de stabilité, et l'autre axe en a beaucoup.

Il n'est donc point exact de dire, comme on le fait d'ordinaire, que si l'axe instantané est un peu écarté de l'axe principal qui répond, soit au plus petit, soit au plus grand moment d'inertie du corps, il s'en éloignera très-peu et ne fera que de petites oscillations pendant toute la durée du mouvement : car si le moment d'inertie relatif à cet axe diffère peu du moment moyen, le pôle instantané, par un petit dérangement, pourra sortir du petit fuseau où il est actuellement, pour tomber dans le fuseau voisin et y aller décrire son orbe s autour de l'autre axe; ou même, s'il n'est déplacé que dans l'intérieur du petit fuseau qui lui répond, il peut encore y décrire un orbe s étroit et fort allongé, et, par conséquent, faire de très-grandes oscillations de part et d'autre du pôle principal d'où on l'a écarté.

Dans les corps où l'un des moments extrêmes d'inertie diffère peu du moment moyen, et, par conséquent, où l'ellipsoïde central du corps est presque de révolution autour de l'un de ses axes, la stabilité de la rotation n'est donc vraiment assurée que pour cet axe. C'est le cas de la terre, dont la rotation est très-stable autour de son axe actuel, et le serait très-peu autour du troisième axe qui, comme on le sait, diffère très-peu de l'axe moyen.

Si cette différence est tout à fait nulle, en sorte que l'ellipsoïde central du corps soit exactement de révolution, il n'y aura de stable que l'axe de ce *sphéroïde;* car il est clair qu'aucun des autres axes principaux (qui sont ici tous les diamètres de l'équateur) ne peut avoir de stabilité. Et en effet, si le pôle instantané tombe actuellement sur l'équateur, et que, par une cause quelconque, il en soit un peu écarté à gauche ou à droite, il ne restera plus immobile; mais il ira décrire sur la surface de l'ellipsoïde un cercle s, parallèle et presque égal à l'équateur : d'où l'on voit que le pôle instantané aura dans le corps un mouvement très-considérable. Mais, d'un autre côté, il est bon de remarquer qu'il n'en aura qu'un très-petit dans l'espace absolu; car le cercle fixe σ, qu'il décrira dans l'espace, aura pour rayon la très-petite distance IP de ce pôle I au pied P de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en I. Ainsi l'axe instantané OI, qui, dans le corps, décrira la surface d'un cône très-ouvert et presque plan, ne

décrira dans l'espace qu'un cône de base très-petite, et paraîtra ainsi comme immobile dans l'espace absolu.

Il n'y a qu'un seul cas d'exception à cette instabilité d'un axe principal situé dans le plan de l'équateur : c'est celui où le pôle instantané serait porté du point de l'équateur où il est actuellement, en un autre point du même équateur; car alors il y resterait immobile, comme il aurait fait dans sa première position si on ne l'en avait point écarté.

49. Enfin, si les trois axes principaux du corps sont égaux entre eux, et que l'ellipsoïde central devienne ainsi une sphère parfaite, tous les axes sont également stables, ou en quelque sorte *indifférents* à tout déplacement accidentel qui pourrait survenir. Car, si l'axe instantané est porté du lieu où il est, dans un autre, il y reste, et redevient immobile et dans le corps et dans l'espace absolu.

V.

Des noms qu'on pourrait donner aux deux courbes s et σ décrites par le pôle instantané de rotation.

50. Si l'on considère un corps *pesant*, de telle figure qu'on voudra, qui ait été lancé d'une manière quelconque dans l'espace, et qu'on fasse abstraction du mouvement progressif qui l'emporte, pour ne plus voir que la rotation de ce corps sur son centre de gravité, il est clair que cette rotation est exactement la même que si le corps était libre, ou dépourvu de toute pesanteur : car les forces parallèles de la gravité, qui agissent à chaque instant sur les molécules de ce corps, se réduisant toujours à une force unique qui passe par le centre, il n'en résulte aucun couple accélérateur qui puisse altérer la rotation du corps autour de ce point. Il ne reste donc, pour faire varier l'axe instantané, que le seul couple g dû aux forces centrifuges qui naissent de la rotation même, comme dans le cas d'un corps entièrement libre de toute action étrangère.

On voit donc que les courbes s et σ que le pôle instantané décrit, l'une sur l'ellipsoïde central du corps, ou dans l'espace *relatif*, l'autre sur le plan fixe du couple, ou dans l'espace *absolu*, sont deux courbes

remarquables que la nature nous offre à chaque instant dans le mouvement des projectiles : et, par cette raison naturelle, il nous semble que chacune d'elles mériterait d'avoir un nom, aussi bien que la courbe décrite par le centre de gravité du corps, et qui est, comme on le sait, une *parabole*.

Je proposerais donc de donner à l'une et à l'autre le nom de *polhodie* [*], en appelant la première s la polhodie *relative*, et la seconde σ la polhodie *absolue*. Ou, si l'on voulait distinguer ces deux courbes par leur forme particulière, on donnerait à l'orbe elliptique et fermé s le simple nom de *polhodie;* et, à la courbe plane et ondulée σ, celui de *herpolhodie* [**], afin de rappeler, avec l'idée du pôle qui la décrit, cette propriété qu'elle a de *serpenter* en circulant autour d'un centre fixe.

VI.

Équations différentielles de ces courbes.

51. L'équation de la polhodie est facile à trouver : car x, y, z étant les coordonnées du pôle qui décrit l'orbe s à la surface de l'ellipsoïde central, on a d'abord (n° **28**)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2},$$

et, par hypothèse,

$$x^2+y^2+z^2=u^2,$$

en désignant par u le rayon vecteur émané du centre.

Ou bien, si l'on tire de ces trois équations les valeurs séparées de

[*] Route du pôle, de πολος et ὁδος.

[**] Route *serpentante* du pôle, de ἑρπω. Suivant les règles précises de l'étymologie, il faudrait dire *polherpohodie*, mais pour plus de simplicité, et surtout plus d'euphonie, il vaut bien mieux s'en tenir à la première dénomination.

x^2, y^2, z^2, on a ces transformées équivalentes :

$$(A)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{-a^4}{(a^2-b^2)(c^2-a^2)}\left[u^2 - \left(b^2 + c^2 - \dfrac{b^2c^2}{h^2}\right)\right], \\ y^2 = \dfrac{-b^4}{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}\left[u^2 - \left(c^2 + a^2 - \dfrac{c^2a^2}{h^2}\right)\right], \\ z^2 = \dfrac{-c^4}{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}\left[u^2 - \left(a^2 + b^2 - \dfrac{a^2b^2}{h^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Or, qu'on différentie ces équations, et qu'on en tire les valeurs de dx, dy, dz en u et du, pour les substituer dans l'expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

et l'on aura, entre les variables s et u, l'équation cherchée de la polhodie s.

Si, dans cette équation, on change simplement ds en $d\sigma$, et u^2 en $v^2 + h^2$, ce qui donne

$$u\,du = v\,dv,$$

on aura l'équation de l'herpolhodie entre son arc σ et le rayon vecteur v, émané du centre P de cette courbe plane.

Enfin, si l'on nomme φ l'angle que le rayon vecteur v fait avec une droite fixe quelconque menée dans le plan de cette courbe, on aura évidemment l'équation

$$d\sigma^2 = v^2 d\varphi^2 + dv^2;$$

de sorte qu'en y mettant, au lieu de $d\sigma$, son expression en v et dv, tirée de la précédente, on aura l'équation de l'herpolhodie entre son rayon vecteur v et l'angle φ qu'il décrit autour du centre; ou ce qu'on appelle l'équation *polaire* de la courbe.

Tous ces calculs n'ont, comme on voit, aucune difficulté; mais avant de les développer, il est bon d'employer quelques abréviations analytiques que j'indiquerai tout à l'heure, et de commencer surtout par une remarque essentielle sur les premières données de notre analyse.

Remarque I.

Sur les données de cette analyse.

32. Les trois premières sont les rayons principaux a, b, c de l'ellipsoïde central; et ces lignes sont toujours données par la nature du corps, puisque ce sont trois lignes réciproques aux *bras de l'inertie* de ce corps autour de ses trois axes principaux. Nous les supposerons toujours rangées dans cet ordre de grandeur

$$a > b > c.$$

Il est évident que a est le plus grand de tous les rayons de l'ellipsoïde, et qu'il est unique; que c est le plus petit, et qu'il est unique; qu'enfin b, perpendiculaire au plan de ces deux-là, est un rayon *moyen* qui est aussi unique, mais seulement par sa position, et non point par sa grandeur : car il est aisé de voir qu'il y a dans l'ellipsoïde une infinité de rayons de même grandeur b, et que ces rayons égaux forment les deux plans singuliers qui donnent les deux sections *circulaires* de l'ellipsoïde; sections inclinées, au plan (ab), d'un angle dont la tangente est $\pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ (1re partie, n° **74**).

Actuellement, par la définition même de l'ellipsoïde *central*, les trois *moments principaux d'inertie* du corps sont entre eux comme les trois quantités $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, et sont ainsi rangés dans l'ordre

$$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}.$$

Mais, par la nature des moments d'inertie d'un corps autour de trois axes rectangulaires, il est clair qu'un quelconque de ces moments est toujours plus petit que la somme des deux autres. Or, d'après l'ordre qu'on vient d'établir, cette condition d'inégalité se trouve déjà exprimée pour chacun des deux moments $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$; mais elle ne l'est point pour le dernier moment $\frac{1}{c^2}$ qui est le plus grand des trois. Il faut donc, indépendamment de la double inégalité

$$a^2 > b^2 + c^2,$$

poser encore celle-ci :

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

qui revient à

$$c > \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

53. On voit par la géométrie que $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse, dans un triangle rectangle dont a et b seraient les deux côtés. L'inégalité précédente revient donc à dire que l'axe *mineur* c d'un ellipsoïde *central* doit toujours être plus grand que cette perpendiculaire : de sorte que cet axe *mineur* ne peut s'étendre que depuis la longueur $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ de cette perpendiculaire jusqu'à celle de l'axe *moyen* b.

Il résulte de là que l'ellipsoïde central peut être un ellipsoïde plus ou moins *allongé*, et même allongé jusqu'à l'*infini*, auquel cas les deux petits axes b et c deviennent égaux ; mais il ne peut être indéfiniment *aplati*, puisque l'axe mineur c doit toujours surpasser

$$ab : \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe, ou si l'on a $b = a$, le sphéroïde *central* ne peut donc s'étendre que depuis la sphère, jusqu'au sphéroïde aplati dont l'axe est la fraction $\frac{1}{\sqrt{2}}$ du rayon de l'équateur.

54. Ainsi, quoi qu'il y ait dans la nature, ou qu'on puisse y concevoir des corps de toutes les constitutions et de toutes les figures possibles ; il n'y a point d'ellipsoïdes *centraux* de toutes les formes possibles, c'est-à-dire qu'il ne serait pas permis de se donner les trois axes d'un ellipsoïde central dans une proportion arbitraire. On peut bien prendre à volonté les deux premiers a et b ; mais, une fois qu'ils sont donnés, il faut que le petit axe c soit pris plus grand que $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; sans quoi l'ellipsoïde central qu'on aurait supposé dans l'analyse ne pourrait appartenir à aucun corps existant ni pouvant exister dans la nature. Cette remarque est importante, car en la perdant de vue dans

l'interprétation des formules analytiques, on s'exposerait à regarder comme réelles des propriétés de mouvement qui n'appartiendraient qu'à des corps imaginaires.

55. Après les trois rayons principaux a, b, c de l'ellipsoïde central, vient une quatrième donnée h : c'est la *perpendiculaire* abaissée du centre sur le plan du couple impulsif, supposé tangent à la surface de cet ellipsoïde; et la seule chose à remarquer sur cette donnée h, c'est qu'elle est toujours comprise entre les deux rayons extrêmes a et c. Car, étant comparée au rayon u qui va du centre au point de contact, elle est plus courte que ce rayon oblique, et à plus forte raison, que le rayon *majeur* a qui est le plus grand de tous les rayons possibles. D'un autre côté, comme cette perpendiculaire h a son pied hors de la surface de l'ellipsoïde, elle est plus grande que le rayon *mineur* c qui est le plus petit de tous les rayons. Ainsi l'on a toujours cette double inégalité

$$a > h > c.$$

Abréviations analytiques.

56. Pour abréger les calculs, je ferai

$$b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2} = \alpha^2,$$

$$c^2 + a^2 - \frac{c^2 a^2}{h^2} = \beta^2,$$

$$a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{h^2} = \gamma^2.$$

où je remarquerai d'abord que les trois quantités désignées par α^2, β^2, γ^2 sont toujours *positives*.

Car, en premier lieu, à cause de h^2 toujours $> c^2$, il est clair que α^2 et β^2 sont toujours *positifs*. Ensuite, comme on doit avoir (n° 52)

$$c^2 > a^2 b^2 : (a^2 + b^2),$$

on a, par conséquent,

$$h^2 > a^2 b^2 : (a^2 + b^2),$$

et il en résulte que la troisième quantité γ^2 est aussi *positive;* car, en

donnant à h^2 une valeur quelconque qu'elle puisse avoir, et que je représente par

$$h^2 = (a^2 b^2 + a^2 c^2) : (a^2 + b^2),$$

il vient

$$\gamma^2 = (a^2 + b^2)\left(1 - \frac{h}{h^2 + c^2}\right)$$

toujours *positif*.

Ainsi α, β, γ seront toujours trois lignes réelles comme les rayons a, b, c de l'ellipsoïde central : la dernière seule γ peut devenir *nulle*, et le devient dans le cas particulier de $h = ab : \sqrt{a^2 + b^2}$; ce qui est au fond le cas de $h = c$, puisque c est nécessairement compris entre h et $ab : \sqrt{a^2 + b^2}$.

57. Maintenant, si l'on prend les différences de la quantité β^2 à chacune des deux autres α^2 et γ^2, on trouve

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{h - c}{h^2}(a^2 - b^2) > 0,$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = \frac{a - h}{h}(b^2 - c^2) > 0;$$

d'où l'on voit que β *est toujours la plus grande des trois lignes* α, β, γ.

Si l'on prend ensuite la différence entre α^2 et γ^2, on trouve

$$\gamma^2 - \alpha^2 = \frac{h^2 - b^2}{h^2}(a^2 - c^2),$$

différence qui est positive ou négative, selon que h est plus grand ou plus petit que b.

Les trois lignes α, β, γ sont donc toujours rangées ainsi qu'il suit :

1°. Pour $h > b$, dans cet ordre : $\beta > \gamma > \alpha$;

2°. Pour $h < b$, dans celui-ci : $\beta > \alpha > \gamma$.

Remarque II.

Maxima et minima des rayons vecteurs de la polhodie.

58. Les trois lignes α, β, γ ne sont pas seulement propres à sim

plifier les expressions de notre analyse, mais elles ont encore une signification remarquable dans le problème qui nous occupe.

Et en effet, par les trois équations précédentes de l'orbe s, entre le rayon vecteur u et chacune des trois coordonnées x, y, z, il est aisé de voir que β est le plus grand des rayons vecteurs u qui vont du centre à cet orbe ou polhodie s. Car, 1°, en faisant $u = \beta$, ces trois équations sont satisfaites, et ne conduisent qu'à des valeurs positives de x^2, y^2, z^2; mais 2°, toute valeur de $u > \beta$ rend l'y^2 *négatif*, et, partant, l'y imaginaire, et ne peut ainsi appartenir comme rayon à l'orbe s.

Le rayon $u = \beta$ est donc le rayon *maximum;* et comme il répond à $y = 0$, on voit qu'il tombe toujours dans le plan principal de l'ellipse moyenne (ac).

Quant au rayon *minimum,* il faut distinguer deux cas :

1°. Si $h > b$, ce rayon *minimum* est la ligne γ; car toute valeur de $u < \gamma$ conduirait à z^2 négatif, et, partant, à z imaginaire. La ligne γ est donc alors le rayon *minimum,* et comme il répond à $z = 0$, on voit qu'il tombe dans le plan de l'ellipse majeure (ab).

Enfin, dans ce même cas de $h > b$, on voit que la troisième ligne α ne peut appartenir comme rayon à aucun des points de l'orbe s : car, en prenant la différence entre h^2 et α^2, on trouve

$$h^2 - \alpha^2 = \frac{(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2};$$

d'où il résulte, à cause de $h > b$ par hypothèse, que la ligne α est alors $< h$, et, par conséquent, ne peut être un des rayons de l'orbe s.

2°. Si $h < b$, c'est au contraire la ligne α qui est le rayon *minimum,* lequel répondant à $x = 0$, tombe dans le plan de l'ellipse *mineure* (bc) : et l'autre ligne γ, qu'on trouve alors $< h$, ne peut appartenir comme rayon vecteur à aucun point de l'orbe s.

Suite des abréviations.

59. Nous emploierons les trois lettres e, e', e'', pour désigner les

excentricités respectives des ellipses principales (ab), (bc), (ac), de l'ellipsoïde central.

Mais, comme les carrés a^2, b^2, c^2 sont rangés dans cet ordre $a^2 > b^2 > c^2$, si l'on commence par poser $a^2 - b^2 = e^2$, et puis $b^2 - c^2 = e'^2$, il faut, pour avoir de la symétrie dans les calculs, suivre encore le même ordre, et prendre ainsi, non pas $a^2 - c^2$, mais $c^2 - a^2 = e''^2$. Seulement, comme on a $c^2 < a^2$, il faudra se rappeler que ce n'est point e''^2, mais bien $-e''^2$, qui représentera le carré de l'excentricité de l'ellipse *moyenne* (ac).

Nous poserons donc, pour la symétrie des expressions,

$$a^2 - b^2 = e^2,$$
$$b^2 - c^2 = e'^2,$$
$$c^2 - a^2 = e''^2,$$

et nous ferons le produit

$$e^2 e'^2 e''^2 = -\varepsilon^6.$$

Relations entre les quantités désignées par

$$\alpha^2, \quad \beta^2, \quad \gamma^2, \quad e^2, \quad e'^2, \quad e''^2.$$

60. Par les abréviations qui précèdent, les trois équations (A), (n° **51**), qui ont lieu entre u et chacune des coordonnées x, y, z de l'orbe s, prennent cette forme très-simple :

$$(A) \qquad \begin{cases} \varepsilon^6 x^2 = a^4 e'^2 (u^2 - \alpha^2), \\ \varepsilon^6 y^2 = b^4 e''^2 (u^2 - \beta^2), \\ \varepsilon^6 z^2 = c^4 e^2 (u^2 - \gamma^2). \end{cases}$$

Or ces équations, étant ajoutées ensemble, donnent

$$\varepsilon^6 (x^2 + y^2 + z^2)$$
$$= (a^4 e'^2 + b^4 e''^2 + c^4 e^2) u^2 - (a^4 e'^2 \alpha^2 + b^4 e''^2 \beta^2 + c^4 e^2 \gamma^2);$$

donc, à cause de

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

on a ces deux premières relations,

$$a^4 e'^2 - b^4 e''^2 - c^4 e^2 = \varepsilon^6,$$
$$c^4 e'^2 \alpha^2 + b^4 e''^2 \beta^2 + c^4 e^2 \gamma^2 = 0.$$

Si l'on divise respectivement les trois mêmes équations (A), la première par a^2, la seconde par b^2, la troisième par c^2, et qu'on ajoute, on trouvera

$$\varepsilon^6 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)$$
$$= a^2 e'^2 + b^2 e''^2 + c^2 e^2 u^2 + a^2 e'^2 \alpha^2 + b^2 e''^2 \beta^2 + c^2 e^2 \gamma^2;$$

donc, à cause de

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

le premier membre se réduit à ε^6, et, par conséquent, le second membre devant aussi se réduire à ε^6, quel que soit u, il faut qu'on ait ces deux nouvelles relations,

$$a^2 e'^2 + b^2 e''^2 + c^2 e^2 = 0,$$
$$a^2 e'^2 \alpha^2 + b^2 e''^2 \beta^2 + c^2 e^2 \gamma^2 = -\varepsilon^6.$$

Les mêmes équations étant divisées respectivement, la première par a^4, la seconde par b^4, la troisième par c^4, donnent

$$\varepsilon^6 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = e'^2 + e''^2 + e^2 u^2 + \alpha^2 e'^2 + \beta^2 e''^2 + \gamma^2 e^2;$$

donc, à cause de

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{h},$$

le premier membre se réduit à $\frac{\varepsilon^6}{h}$; et, par conséquent, le second devant se réduire aussi à $\frac{\varepsilon^6}{h}$, quel que soit u, on a ces deux nouvelles relations,

$$e'^2 + e''^2 + e^2 = 0,$$
$$\alpha^2 e'^2 + \beta^2 e''^2 + \gamma^2 e^2 = -\varepsilon^6 : h.$$

Ainsi, en employant, pour abréger, le signe somme Σ, on a les

six relations suivantes :

$$(1)\quad \Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6, \qquad (2)\quad \Sigma a^4 e'^2 \alpha^2 = 0,$$

$$(3)\quad \Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 = -\varepsilon^6, \qquad (4)\quad \Sigma a^2 e'^2 = 0,$$

$$(5)\quad \Sigma \alpha^2 e'^2 = \frac{\varepsilon}{h}, \qquad (6)\quad \Sigma e'^2 = 0,$$

qui serviront à réduire les expressions.

61. Nous ferons encore, pour la facilité de l'analyse,

$$(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2) = h^6 - Ah^4 + Bh^2 - C = D,$$
$$(h^2 - \alpha^2)(h^2 - \beta^2)(h^2 - \gamma^2) = h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R = \Delta,$$

ce qui donne

$$A = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$B = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2,$$
$$C = a^2 b^2 c^2.$$

$$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$
$$Q = \alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2,$$
$$R = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2.$$

Et, si l'on veut exprimer P, Q, R en A, B, C, on trouvera ces relations

$$P = \frac{2Ah^2 - B}{h^2},$$

$$Q = \frac{(A^2 + B)h^4 - AB + 3C)h^2 + AC}{h^4}.$$

$$R = \frac{(AB - C)h^6 - B^2 + AC)h^4 + 2BCh - C}{h^6}$$

62. Au reste, comme on a

$$h^2 - \alpha^2 = \frac{(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2},$$

$$h^2 - \beta^2 = \frac{(h^2 - c^2)(h^2 - a^2)}{h^2},$$

$$h^2 - \gamma^2 = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)}{h^2},$$

il en résulte (en faisant le produit) qu'on a entre les deux polynômes désignés par D et Δ, la relation très-simple

$$\Delta = D^2 : h^6.$$

Tous ces préliminaires étant posés, passons au développement des calculs indiqués au commencement de ce paragraphe.

Équation de la polhodie entre l'arc s et le rayon vecteur u.

63. Les trois équations (A) du n° **60**, étant différentiées, nous donnent

$$dx^2 = \frac{a^4 e'^2 . u^2 du^2}{\varepsilon^4 (u^2 - \alpha^2)}, \quad dy^2 = \frac{b^4 e''^2 . u^2 du^2}{\varepsilon^4 (u^2 - \beta^2)}, \quad dz^2 = \frac{c^4 e^2 . u^2 du^2}{\varepsilon^4 (u^2 - \gamma^2)};$$

on a donc, en ajoutant,

$$ds^2 = \frac{u^2 du^2}{\varepsilon^4} \left(\frac{a^4 e'^2}{u^2 - \alpha^2} + \frac{b^4 e''^2}{u^2 - \beta^2} + \frac{c^4 e^2}{u^2 - \gamma^2} \right);$$

ou bien, si l'on réduit au même dénominateur et qu'on ordonne le numérateur suivant les puissances de u^2, on aura

$$ds^2 = \frac{u^2 du^2}{\varepsilon^6} \left[\frac{u^4 \Sigma a^4 e'^2 - u^2 \Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2) + \Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2}{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)} \right].$$

où l'on peut reconnaître *à priori* que le numérateur doit avoir tous ses termes divisibles par ε^6; car il est facile de voir que chacun des coefficients $\Sigma a^4 e'^2$, $\Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2)$, $\Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2$, s'évanouit en y faisant

$$\text{soit} \quad e^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2,$$

$$\text{soit} \quad e'^2 = 0 \quad \text{ou} \quad b^2 = c^2,$$

$$\text{soit} \quad e''^2 = 0 \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2;$$

et que, par conséquent, il est actuellement divisible par le produit

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = \varepsilon^6.$$

Mais il s'agit ici de trouver le quotient sans faire la division.

Or, d'après la relation (1), on a d'abord

$$\Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6.$$

Ensuite, le coefficient

$$\Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2)$$

si l'on y met, au lieu de $\beta^2 + \gamma^2$ sa valeur $P - \alpha^2$) prend la forme

$$P \Sigma a^4 e'^2 - \Sigma a^4 e'^2 \alpha^2,$$

quantité qui, d'après les relations (1) et (4), se réduit à $\varepsilon^6 P$. Ainsi l'on a

$$\Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2) = \varepsilon^6 . P.$$

Enfin, le dernier coefficient

$$\Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2$$

si l'on y met pour $\beta^2 \gamma^2$ sa valeur $Q - \alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2)$) se change d'abord en

$$Q \Sigma a^4 e'^2 - \Sigma a^4 e'^2 \alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2) = \varepsilon^6 Q - \Sigma a^4 e'^2 \alpha^2 (P - \alpha^2),$$

ou, par la relation (4),

$$= \varepsilon^6 Q + \Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 (a^2 \alpha^2);$$

or, si l'on met, pour $(a^2 \alpha^2)$, sa valeur

$$(a^2 \alpha^2) = a^2 b^2 + a^2 c^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{h^2} = B - b^2 c^2 - \frac{C}{h^2},$$

ce coefficient devient

$$\varepsilon^6 Q + \left(B - \frac{C}{h^2}\right) \Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 - C \Sigma \alpha^2 e'^2,$$

d'où, par les relations (3) et (5), on conclut enfin

$$\Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2 = \varepsilon^6 \left(Q - B + \frac{2C}{h^2}\right).$$

On aura donc, en substituant ces valeurs, et supprimant le facteur commun ε^6,

$$ds^2 = du^2 \left[\frac{u^4 - P u^2 + Q - B + 2C : h^2}{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)}\right].$$

ou, en tirant la racine carrée, et mettant le dénominateur sous la forme $u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R$,

$$ds = u\,du\sqrt{\frac{u^4 - Pu^2 + Q - B + 2C : h^2}{u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R}},$$

ce qui est l'équation cherchée de la polhodie s.

64. Dans le cas singulier de $h = b$, ce qui donne

$$\alpha = \gamma = b, \quad P = 2b^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad Q - B + 2C : h^2 = b^2(b^2 + \beta^2),$$

l'équation devient

$$ds = u\,du\sqrt{\frac{u^2 - (b^2 + \beta^2)}{u(u^2 - b^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

C'est, en effet, entre l'arc et le rayon vecteur émané du centre, l'équation différentielle d'une ellipse aux rayons principaux b et β, ce qui s'accorde entièrement avec ce qu'on a vu, et confirme ainsi notre analyse.

On a donc, pour l'intégrale de l'équation précédente, s égal à la longueur de l'arc correspondant au rayon u dans une ellipse dont les rayons principaux sont b et β : ce qu'on peut indiquer de cette manière,

$$s = \text{arc}\ (\text{ray} = u) \qquad (\text{ellipse } b, \beta).$$

Equation de l'herpolhodie σ.

65. Si dans l'équation précédente on change simplement ds en $d\sigma$, et u^2 en $v^2 + h^2$, ce qui donne

$$u\,du = v\,dv,$$

on aura sur-le-champ

$$d\sigma = v\,dv\sqrt{\frac{(v^2 + h^2)^2 - P(v^2 + h^2) + Q - B + 2C : h^2}{(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2) + Q(v^2 + h^2) - R}},$$

pour l'équation de l'herpolhodie entre son arc σ et le rayon vecteur v émané du centre de cette courbe plane.

Équation polaire de la même courbe.

66 En nommant φ l'inclinaison du rayon vecteur v sur une droite fixe quelconque menée dans le plan de la courbe, on a évidemment

$$d\sigma^2 = v^2 d\varphi^2 + dv^2,$$

d'où l'on tire

$$d\varphi = \frac{\sqrt{d\sigma^2 - dv^2}}{v}.$$

Il ne s'agit donc que de mettre dans cette équation, au lieu de $d\sigma$, son expression précédente en v, pour avoir l'équation de l'herpolhodie entre son rayon vecteur v et l'angle φ qu'il décrit autour du centre de cette courbe

Or, si l'on fait cette substitution, qu'on réduise au même dénominateur, et qu'on ordonne le numérateur par rapport aux puissances de v^2, on trouve, en changeant à la fois les signes des deux termes de la fraction,

$$d\varphi = \frac{dv}{v}\sqrt{\frac{h^2 v^4 + (2h^3 - Ph^2 - B + 2C : h)v^2 + (h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R)}{R - Q(v^2 + h^2) + P(v^2 + h^2)^2 - (v^2 + h^2)}}.$$

Or je remarque que le numérateur de la fraction soumise au radical est un carré parfait : car, en y mettant, au lieu de Ph^2, sa valeur $2Ah^2 - B$, ce numérateur devient

$$h^2 v^4 + 2\left(\frac{h^6 - Ah^4 + Bh - C}{h}\right) hv^2 + (h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R),$$

ou (d'après les abréviations précédentes (n° **61**) et la relation $\Delta = \frac{D^2}{h^6}$),

$$h^2 v^4 + 2\frac{D}{h}\, hv^2 + \frac{D^2}{h^6};$$

trinôme où l'on voit le carré parfait du binôme $hv^2 + \frac{D}{h^3}$. On a donc cette expression plus simple

$$d\varphi = \frac{dv}{v} \cdot \frac{hv^2 + D : h}{\sqrt{R - Q(v^2 + h^2) + P(v^2 + h^2)^2 - (v^2 + h^2)}},$$

pour l'équation polaire cherchée.

67. Au reste, on peut encore présenter l'équation sous cette autre forme, où l'on ne verrait que le polynôme désigné par Δ, avec ses *dérivés* Δ', Δ'', pris relativement à h^2.

Car, comme on a fait, pour abréger,

$$\Delta = h^6 - \mathrm{P}h^4 + \mathrm{Q}h^2 - \mathrm{R},$$

si l'on fait de même

$$\Delta' = 3h^4 - 2\mathrm{P}h^2 + \mathrm{Q}$$

et

$$2\Delta'' = 2.3h^2 - 2\mathrm{P},$$

l'expression précédente de $d\varphi$, en y mettant encore, au lieu de $\mathrm{D} : h^3$, sa valeur $\sqrt{\Delta}$, prendra la forme

$$d\varphi = \frac{dv}{v\sqrt{-1}} \cdot \frac{hv^2 + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{v^6 + \Delta'' v^4 + \Delta' v^2 + \Delta}},$$

expression où il faut remarquer qu'il n'y a, au fond, rien d'imaginaire, parce que le polynôme $v^6 + \Delta'' v^4 + \Delta' v^2 + \Delta$, qui est sous le radical, est essentiellement *négatif*, comme le produit

$$(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2),$$

auquel il est équivalent : de sorte que $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{v^6 + \Delta'' v^4 + \Delta' v^2 + \Delta}$ est toujours réel, tant qu'on ne donne à v, comme cela doit être, que des valeurs prises dans les limites où elles sont naturellement renfermées.

Si l'on fait $v^2 = \rho$, l'équation précédente prend la forme

$$d\varphi = \frac{(\sqrt{\Delta} + h\rho)\, d\rho}{2\rho\sqrt{-1}\sqrt{\rho^3 + \Delta''\rho^2 + \Delta'\rho + \Delta}},$$

dont l'intégrale se rapporte évidemment aux transcendantes elliptiques.

Cas singulier de $h = b$, où l'herpolhodie devient une spirale.

68. Quand on suppose $h = b$, la polhodie s devient, comme on l'a vu, une ellipse aux rayons principaux b et β, et dont l'équation

différentielle est

$$ds = u\,du\,\frac{\sqrt{u^2 - (b^2 + \beta^2)}}{\sqrt{(u^2 - b^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

Si l'on fait

$$ds = d\sigma \quad \text{et} \quad u^2 = v^2 + b^2,$$

on a donc, pour l'herpolhodie σ,

$$d\sigma = dv\,\frac{\sqrt{\beta^2 - v^2}}{\sqrt{(\beta^2 - b^2) - v^2}},$$

équation en apparence plus simple que la première, mais dont l'intégrale exige également la rectification d'un arc d'ellipse, car il est clair qu'on a

$$\sigma = \text{arc}\,(\text{ray} = \sqrt{b^2 + v^2}) \qquad (\text{ellipse } b, \beta).$$

69. Mais, en y faisant

$$d\sigma = \sqrt{v^2\,d\varphi^2 + dv^2},$$

pour avoir l'équation polaire de la même courbe, on trouve l'équation différentielle

$$d\varphi = b\,\frac{dv}{v\sqrt{(\beta^2 - b^2) - v^2}},$$

qui s'intègre par les *logarithmes* : car, en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{\beta^2 - b^2} = n,$$

c'est-à-dire en nommant n l'excentricité de l'ellipse roulante s qui produit la courbe σ, on a, pour l'intégrale,

$$\varphi = \frac{b}{n}\log\left(\frac{v}{n + \sqrt{n^2 - v^2}}\right),$$

où l'on suppose que l'angle φ soit nul ou commence quand le rayon vecteur v est égal à n ou $\sqrt{\beta^2 - b^2}$ qui est sa valeur *maximum* : ce qui place l'origine au sommet de la courbe.

On a donc, en passant des logarithmes aux nombres,

$$e^{\frac{n\varphi}{b}} = \frac{v}{n + \sqrt{n^2 - v^2}},$$

e désignant ici, suivant l'usage, la base des logarithmes naturels.

Ou bien, si l'on veut tirer v en φ, on a

$$v = \frac{2n}{e^{\frac{n\varphi}{b}} + e^{-\frac{n\varphi}{b}}},$$

ce qui est la forme la plus simple de l'équation polaire de la courbe σ dans le cas singulier dont il s'agit.

70. Par cette expression de v en φ, on voit que le rayon vecteur v ne change point de grandeur quand on change le signe de l'angle φ : de sorte que la courbe jette, à gauche et à droite de son sommet, deux branches parfaitement égales. On voit encore que v diminue lorsque φ augmente, et que ce rayon v ne peut toutefois devenir nul qu'en supposant $\varphi = \pm\infty$: d'où il résulte que la courbe est une spirale double dont les deux branches continues font, en sens contraires, une infinité de révolutions autour du même centre, se rapprochant sans cesse de ce point, et de plus près que tout ce qu'on voudra, sans pouvoir jamais l'atteindre : ce qui confirme tout ce qu'on a dit précédemment sur la nature de cette spirale.

Au reste, pour une précision parfaite dans les termes, il faut bien remarquer que le centre n'est pas à la rigueur un point *asymptotique ;* je veux dire, ne pourrait être regardé comme un cercle infiniment petit que la spirale tend sans cesse à venir toucher. Car en nommant j l'inclinaison de la courbe σ au rayon vecteur v qui la décrit, on trouve aisément, par le triangle rectangle formé sur les trois côtés $d\sigma$, $dv = v\,d\varphi$, l'équation

$$\sin j = \frac{b}{\sqrt{\beta^2 - v^2}};$$

d'où l'on voit que si la spirale est perpendiculaire au rayon vecteur v lorsque

$$v^2 = \beta^2 - b^2,$$

c'est-à-dire au sommet de la courbe, elle y est inclinée partout ailleurs, et même jusqu'au centre, puisque, en faisant $v = 0$, on trouve

$$\sin j = \frac{b}{\beta},$$

ce qui répond à un angle j différent d'un droit, à cause de $b < \beta$

71. Je ne parle point de ces cas particuliers de $a = b$, $b = c$, où l'ellipsoïde central du corps est un ellipsoïde de révolution; car si l'on a, par exemple,

$$b = c,$$

il s'ensuit que

$$u = \beta = \gamma = \textit{constante} :$$

et alors il est clair que la polhodie est un cercle décrit autour de l'axe a, d'un rayon $\frac{b^2}{h}\sqrt{\frac{a^2-h^2}{a^2-b^2}}$; et l'herpolhodie est un autre cercle décrit autour de l'axe fixe du couple, d'un rayon

$$\sqrt{\beta^2 - h^2} = \frac{\sqrt{(a^2-h^2)(h^2-b^2)}}{h}.$$

VII.

Idée de la détermination du lieu du corps au bout d'un temps donné.

72. Après avoir reconnu la nature des deux courbes s et σ, il est naturel de chercher la vitesse $\frac{ds}{dt}$ ou $\frac{d\sigma}{dt}$ avec laquelle le pôle instantané décrit en même temps l'une et l'autre : et cette recherche, qui mène à celle du lieu du corps au bout d'un temps donné, n'a pas plus de difficulté que les précédentes.

Pour nous en faire une idée, considérons les variables x, y, z et u comme des fonctions du temps t. Si aux trois équations précédentes (n° **51**) déjà posées entre les variables, on joint l'équation qui exprime la quantité du couple accélérateur dû aux forces centrifuges, il sera facile d'en tirer la valeur de $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ ou de $\frac{ds}{dt}$ en fonction du rayon vecteur u : de sorte qu'on aura d'abord l'équation

$$\frac{ds}{dt} = f(u),$$

f désignant une certaine fonction déterminée de u.

Mais, par les mêmes équations, on trouvera aussi d'une manière facile la valeur de $\frac{du}{dt}$ en fonction du même rayon u; et de cette équa-

tion, qui ne sera qu'entre les variables u et t, on pourra passer, par une simple quadrature, à l'expression de u en t. Si donc on met cette valeur à la place de u, dans l'équation précédente

$$\frac{ds}{dt} = f(u),$$

on aura, entre s et t, une équation différentielle de la forme

$$\frac{ds}{dt} = F(t),$$

ce qui donnera la vitesse du pôle sur l'arc s, en fonction du temps t: vitesse parfaitement égale à la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ avec laquelle le pôle décrit en même temps l'arc σ dans l'espace absolu.

De cette dernière équation

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = F(t),$$

où $F(t)$ sera évidemment une fonction périodique, il ne restera donc plus qu'à remonter par une seconde intégration à la longueur même des deux arcs s et σ en fonction du temps t employé à les décrire: car sitôt qu'on aura cette intégrale, que je représenterai par

$$s = \sigma = \Phi(t),$$

on pourra dire que le problème de la rotation des corps est entièrement résolu; c'est-à-dire qu'on est actuellement en état d'assigner le lieu précis de l'espace où se trouvera le corps au bout d'un temps quelconque donné.

Et, en effet, on saura qu'au bout de ce temps le pôle instantané doit être, sur la surface de l'ellipsoïde central, à l'extrémité S de l'arc s qui répond à ce temps donné t; et que ce même pôle doit être, sur le plan fixe, à l'extrémité Σ de l'arc σ de même longueur qui répond au même temps donné. Or, le centre de l'ellipsoïde étant retenu immobile en O à la hauteur donnée h au-dessus du plan fixe, on n'aura qu'à mettre cet ellipsoïde en contact avec ce plan de manière qu'il touche par le point déterminé S de sa surface, et au point déter-

miné Σ du plan dont il s'agit : et de cette manière l'ellipsoïde central se trouvera posé dans le lieu précis de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps donné t.

On voit combien cette analyse est claire et naturelle : on peut encore la simplifier et la varier de plusieurs manières en considérant d'autres quantités relatives à la position du corps; il ne nous reste donc qu'à la développer, et c'est ce qu'on va faire dans la troisième partie de ce Mémoire. Mais auparavant, je crois bon de rapprocher notre méthode de l'analyse ordinaire; de montrer, par exemple, comment le seul théorème (n° **13**) relatif aux forces centrifuges, étant traduit en analyse, donne sur-le-champ les trois équations fondamentales que l'on doit à Euler; et comment, de ces équations, qui étaient connues, on aurait pu tirer notre solution nouvelle, à l'aide de quelques simples transformations analytiques : rapprochement toujours instructif en ce qu'il éclaire à la fois les deux méthodes.

CHAPITRE III.

OÙ L'ON RAPPROCHE L'ANALYSE PRÉCÉDENTE DE CELLE D'EULER.

Toute notre analyse est renfermée, comme je l'ai dit, dans le théorème rappelé ci-dessus, par lequel on connaît à chaque instant l'axe et la grandeur du couple accélérateur g qui vient des forces centrifuges, et fait ainsi varier l'axe et la grandeur du couple acquis G dont le corps est actuellement animé.

Il n'y a donc qu'à traduire ce théorème en analyse, pour avoir ce qu'on appelle les *équations du mouvement du corps;* et cette traduction, comme on va le voir, est extrêmement facile.

Equations du mouvement de rotation.

73. Toutes les dénominations précédentes étant conservées, qu'on reprenne un instant les simples lettres A, B, C, pour désigner les trois moments principaux d'inertie du corps.

Les trois quantités Ap, Bq, Cr seront les trois composants L, M, N

du couple G dont le corps est animé : et les rotations p, q, r étant regardées comme des fonctions du temps t, les trois fonctions différentielles ou fluxions $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$, que je dénoterai plus simplement par Ap, Bq, Cr, seront les trois composants du couple accélérateur qui peut faire varier l'axe et la grandeur du couple acquis G. Or il n'y a ici d'autre couple accélérateur que celui qui naît des forces centrifuges dues à la rotation même du corps, et notre théorème dit :

1°. Que l'axe du couple g est perpendiculaire à l'axe du couple acquis G, ou, en d'autres termes, que le cosinus de leur inclinaison mutuelle est nul. On a donc, en prenant l'expression de ce cosinus, qui est évidemment

$$\frac{Ap.Ap + Bq.Bq + Cr.Cr}{G\ g},$$

et, l'égalant à zéro,

$$1 \qquad A^2pp + B^2qq + C^2rr = 0,$$

ce qui est la *première équation du mouvement*.

2°. Le même théorème dit que l'axe de ce couple g est aussi perpendiculaire à l'axe instantané de la rotation actuelle θ dont les trois projections sur les axes principaux sont respectivement p, q, r. On a donc, comme ci-dessus, en prenant le cosinus de l'inclinaison mutuelle et l'égalant à zéro,

$$2 \qquad App + Bqq + Crr = 0,$$

seconde équation du mouvement.

3°. Enfin, le même théorème dit que l'on a, pour la grandeur du couple g, le produit de G par $\theta \sin i$; ce qui donne l'équation

$$g^2 = G^2.\theta^2(1 - \cos^2 i),$$

i étant l'inclinaison de G à θ. Donc, en mettant au lieu de G^2, θ^2, $\cos^2 i$, leurs valeurs en p, q, r, et pour g^2 son expression générale

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2,$$

on aura

$$3 \ldots A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = (A-B)^2p^2q^2 + (B-C)^2q^2r^2 + (C-A)^2p^2r^2$$

troisième et dernière équation du mouvement.

COROLLAIRE.

74. Si, de ces trois équations, on tire les valeurs séparées de Ap, Bq, Cr, on trouve sur-le-champ ces transformées équivalentes :

$$Ap = (B - C)qr,$$
$$Bq = (C - A)pr,$$
$$Cr = (A - B)pq;$$

ce sont les équations d'*Euler*, et qui se trouvent ainsi démontrées de la manière la plus simple. Nous pourrions en donner encore d'autres démonstrations aussi rapides; mais celle-ci me paraît la plus lumineuse, parce qu'on y voit parfaitement ce que ces équations expriment en dynamique.

Et en effet, dans la première, par exemple, le premier membre Ap ou $A\frac{dp}{dt}$, est l'expression générale du couple accélérateur estimé autour de l'axe principal Ox; et le second membre $(B - C)qr$ est la valeur du couple provenant des forces centrifuges, estimé autour du même axe, comme il est facile de s'en assurer en cherchant ce couple d'une manière directe. Or, puisque le corps est ici abandonné à lui-même, c'est-à-dire ne reçoit l'action d'aucun couple étranger, il est clair que la quantité $(B - C)qr$ est ici la seule à laquelle il faille égaler l'expression générale $A\frac{dp}{dt}$. Et la même chose se voit pour les deux autres équations toutes semblables, qui se rapportent aux deux autres axes principaux Oy et Oz.

Remarque.

75. On peut encore remarquer que cette démonstration nous mène de suite aux équations du mouvement, dans le cas général où le corps

est soumis à l'action de forces accélératrices étrangères; car il est évident qu'il faudrait alors ajouter au second membre le couple qui provient de ces forces accélératrices autour de l'axe que l'on considère. Ainsi, en désignant par X, Y, Z les forces accélératrices qui agissent sur chaque molécule dm du corps parallèlement aux trois axes principaux, on aurait $\int(Zy - Yz)\,dm$ pour le couple dû à ces forces autour de l'axe principal Ox : et le premier membre $A\frac{dp}{dt}$, qui est l'expression générale du couple accélérateur dont le corps est animé, devrait être égalé à la somme des deux couples $(B - C)\,qr$ et $\int(Zy - Yz)\,dm$, l'un dû aux forces centrifuges et l'autre aux forces accélératrices étrangères. D'où l'on voit avec évidence que les équations générales du mouvement de rotation d'un corps sollicité par des forces quelconques, sont

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + \int(Zy - Yz)\,dm,$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)\,pr + \int(Xz - Zx)\,dm,$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq + \int(Yx - Xy)\,dm,$$

X, Y, Z étant les forces qui sollicitent chaque molécule du corps, suivant les directions des trois axes principaux.

Quand ces forces sont de nature à se réduire à une force unique passant toujours par le centre de la rotation, les trois couples $\int(Zy - Yz)\,dm$, $\int(Xz - Zx)\,dm$, $\int(Yx - Xy)\,dm$ sont nuls, et les équations reviennent aux trois précédentes, comme si le corps était libre de toute action étrangère; c'est ce premier cas simple et naturel qui fait le principal objet de notre analyse.

II.

Comment on aurait pu déduire notre théorie des trois équations qui précèdent.

76. Considérons les trois équations (1), (2), (3), et voyons les premiers corollaires qui en découlent.

Corollaire I.

On voit d'abord que l'équation différentielle (1) s'intègre immédiatement et donne

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \textit{constante} = G^2,$$

où je fais la *constante* égale à G^2, parce qu'il est évident que le premier membre exprime le carré du couple G dont le corps est animé. Ainsi cette intégrale répond au théorème de la *conservation de la* grandeur *du couple d'impulsion.*

Corollaire II.

L'équation (2) s'intègre de même et donne

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = \textit{constante} = F.$$

Pour savoir à quoi répond la *constante* F, j'observe que le premier membre étant divisé par θ^2, exprime le moment d'inertie I du corps autour de l'axe de la rotation θ (n° **1**). On a donc la constante F égale à $I\theta^2$ qui est évidemment l'expression des forces vives de toutes les molécules du corps : d'où résulte le théorème de la *conservation des forces vives* dans tout le cours de la rotation.

Corollaire III.

Si, au lieu de diviser le premier membre par θ^2, on le divisait par le produit $G\theta$, il est clair que ce premier membre exprimerait le cosinus de l'inclinaison i de l'axe G à l'axe θ. D'où l'on voit que $G\theta \cos i$ est encore l'expression de la constante F; et comme G est constant (corollaire I), il en résulte

$$\theta \cos i = \textit{constante};$$

ce qui donne le théorème de la *conservation de la vitesse angulaire du corps estimée autour de l'axe du couple d'impulsion* G.

Corollaire IV.

On peut encore remarquer que l'équation (2) qui, vue sous la forme

$$\frac{Ap \times p + Bq \times q + Cr \times r}{g \times \theta} = 0,$$

exprime l'égalité à zéro du cosinus de l'inclinaison de g à θ, et par conséquent, la perpendicularité de ces deux axes, exprime encore, si on la regarde sous la forme

$$\frac{Ap \times p + Bq \times q + Cr \times r}{G \times \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = 0,$$

la perpendicularité de l'axe G à celui de la rotation $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ qui serait due au couple g. D'où l'on voit que *cet axe, sur lequel les forces centrifuges tendent à faire tourner, est toujours situé dans le plan même du couple d'impulsion.*

Corollaire V.

Enfin, l'équation (3), qu'il est facile de ramener à la forme

$$\frac{g\,dt}{G} = \theta \sin i\,dt,$$

montre, comme on l'a déjà vu (première partie), que si, au bout d'un instant dt, l'axe OG du couple a passé de sa position actuelle à celle de la diagonale OG′ du rectangle construit sur les deux lignes G et $g\,dt$, et de cette manière a décrit *dans le corps* un angle $\frac{g\,dt}{G}$; d'un autre côté, par la rotation du corps, cette droite OG′ a tourné en sens contraire d'un angle $\theta \sin i\,dt$ égal au premier, et se trouve ainsi revenue au même lieu OG *dans l'espace absolu;* ce qui répond au théorème de l'*invariabilité du plan du couple* G *dans toute la suite du mouvement.*

Corollaire VI.

Si, dans les deux équations intégrales précédentes, que je mets sous la forme

$$\frac{A^2}{G^2}p^2 + \frac{B^2}{G^2}q^2 + \frac{C^2}{G^2}r^2 = 1,$$

$$\frac{A}{F}p^2 + \frac{B}{F}q^2 + \frac{C}{F}r^2 = 1,$$

on regarde p, q, r comme les trois coordonnées d'un point, on voit que ce point, qui fait le *pôle instantané* de la rotation θ, est toujours situé sur les deux ellipsoïdes représentés par ces équations : ellipsoïdes dont le premier a ses trois axes de longueurs réciproques aux trois *moments d'inertie* A, B, C du corps; et le second, aux *racines carrées* de ces mêmes moments. C'est ce dernier que nous avons déjà considéré et nommé l'ellipsoïde *central*.

Le pôle instantané décrit donc sans cesse dans l'intérieur du mobile l'orbe ou la courbe fermée qui résulte de l'intersection de ces deux surfaces.

Si l'on retranche les deux équations l'une de l'autre, on a

$$A(G^2 - AF)p^2 + B(G^2 - BF)q^2 + C(G^2 - CF)r^2 = 0,$$

équation d'une surface conique du second degré, rapportée au même centre et aux mêmes axes que les précédentes. Le pôle instantané étant donc toujours sur cette surface conique, l'axe instantané lui-même y est aussi, et, par conséquent, cet axe décrit dans l'intérieur du corps la surface conique du second degré dont il s'agit.

Corollaire VII.

Si l'on regarde maintenant les trois quantités Ap, Bq, Cr ou L, M, N comme les trois coordonnées d'un point, ce point sera l'extrémité de la ligne G qui marque la grandeur du couple d'impulsion, ou ce qu'on peut nommer le pôle de ce couple. On voit donc par les

mêmes équations, qui deviennent,

$$\frac{L^2 + M^2 + N^2}{G^2} = 1,$$

$$\frac{L^2}{AF} + \frac{M^2}{BF} + \frac{N^2}{CF} = 1,$$

que le pôle du couple est toujours sur la sphère au rayon G, et sur l'ellipsoïde aux rayons principaux $\sqrt{AF}$, $\sqrt{BF}$, $\sqrt{CF}$, *directement* proportionnels aux racines carrées des trois moments d'inertie A, B, C. Le pôle du couple décrit donc, dans l'intérieur du corps, l'orbe fermé qui résulte de l'intersection de ces deux surfaces; et l'axe lui-même OG trace le cône du second degré représenté par l'équation

$$\frac{G^2 - AF}{A} L^2 + \frac{G^2 - BF}{B} M^2 + \frac{G^2 - CF}{C} N^2 = 0,$$

qu'on trouve en retranchant les deux premières l'une de l'autre.

COROLLAIRE VIII.

Si, à la surface de l'ellipsoïde central, qui est représentée par l'équation

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = F,$$

on conçoit un plan tangent au point dont les coordonnées soient désignées par p, q, r, et si l'on nomme p', q', r' les coordonnées courantes de ce plan, on aura, pour son équation,

$$App' + Bqq' + Crr' = F,$$

ou bien

$$Lp' + Mq' + Nr' = F.$$

Or il est clair que cette équation est celle d'un plan perpendiculaire à la ligne G dont les trois projections sur les axes sont respectivement L, M, N. Donc, le plan qui touche l'ellipsoïde central au pôle instantané, est toujours parallèle au plan du couple d'impulsion. Et comme sa distance au centre est mesurée par $\theta \cos i$, et que $\theta \cos i$ est constante (corollaire III), on voit que ce plan parallèle au plan du couple reste toujours à la même distance du centre de l'ellipsoïde.

Mais ce centre est immobile, et le plan du couple toujours parallèle à lui-même dans l'espace absolu; donc ce plan tangent au pôle est toujours un seul et même plan fixe, et tout le mouvement de l'ellipsoïde central consiste à rouler, sans glisser, sur ce plan fixe, en tournant sur le rayon mené du centre au point de contact avec une vitesse angulaire θ mesurée par ce rayon; etc., etc.

77. On voit avec quelle facilité on pourrait tirer toute notre théorie des trois équations précédentes, à l'aide de quelques simples transformations. Mais ce n'est qu'une apparente fécondité de cette méthode de pur calcul qu'on appelle assez improprement l'*analyse*. Car si les théorèmes sont déjà connus, on découvre bien vite les transformations à faire pour que les équations y répondent; mais quand on n'a aucune idée de ces théorèmes, on ne transforme guère qu'au hasard, et le plus souvent on n'arrive à rien. La vraie analyse est dans l'examen attentif du problème à résoudre, et dans ces premiers raisonnements qu'on fait pour le mettre en équations. Transformer ensuite ces équations, c'est-à-dire les combiner ensemble, ou en poser d'autres évidentes que l'on combine avec elles, n'est au fond que de la synthèse; à moins que l'idée de chaque transformation ne nous soit donnée par quelque vue nouvelle de l'esprit, ou quelque nouveau raisonnement, ce qui nous fait rentrer dans la véritable analyse. Hors de cette voie lumineuse, il n'y a donc plus d'analyse, mais une obscure *synthèse* de formules algébriques que l'on *pose*, pour ainsi dire, l'une sur l'autre, et sans trop prévoir ce que pourra donner cette combinaison. Voilà les idées nettes qu'il faut attacher aux mots : et c'est au fond ce que tout le monde paraît sentir, puisqu'on dit très-bien une *heureuse* transformation, et qu'on ne dit point un *heureux* raisonnement, ni une *heureuse* analyse.

(La troisième partie paraîtra dans un prochain cahier.)

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES;

PAR J. LIOUVILLE.

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXXII, séance du 14 avril 1851.

Les leçons que j'ai faites au Collége de France dans le semestre qui vient de s'écouler, ont eu pour objet la théorie des formules différentielles entières et homogènes, et en particulier la théorie des formules quadratiques à deux variables, $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$. C'est par une telle formule que s'exprime le carré ds^2 de l'élément d'une ligne quelconque tracée sur une surface; et M. Gauss a fait voir que le produit RR_1 des rayons de courbure principaux de la surface en chaque point, ne dépend que des coefficients E, F, G et de leurs dérivées premières et secondes, en sorte qu'il est le même pour deux surfaces composées des mêmes éléments linéaires ds. L'égalité des valeurs correspondantes du produit RR_1 pour deux surfaces ainsi liées entre elles, a, du reste, été établie ou plutôt vérifiée depuis par des méthodes plus faciles, et j'ai moi-même, dans ces leçons récentes, donné pour cet objet un procédé nouveau, qui me paraît le plus simple de tous. Mais les méthodes dont je parle ne donnent pas la valeur générale de RR_1, et ce n'est pas sur le point de détail auquel elles conviennent que je désire appeler l'attention de l'Académie. La question vraiment importante que l'on devait ici se proposer, était d'arriver, avec beaucoup moins de calcul, à la formule que M. Gauss a trouvée pour exprimer le produit RR_1, quelles que soient les variables u, v; on devait aussi chercher à écrire le résultat sous une forme nette et concise; enfin, on avait à rattacher l'expression obtenue à d'autres quantités géométriques.

Je crois avoir atteint le but proposé. A l'aide d'un calcul assez facile, et qui fournit d'ailleurs d'autres résultats importants, je trouve

qu'en posant

$$D = \sqrt{EG - F^2},$$

on a

$$\frac{1}{RR} = -\frac{1}{2D}\cdot\frac{d}{du}\frac{1}{D}\left(\frac{dG}{du} + \frac{F}{G}\frac{dG}{dv} - 2\frac{dF}{dv}\right) - \frac{1}{2D}\cdot\frac{d}{dv}\frac{1}{D}\left(\frac{dE}{dv} - \frac{F}{G}\frac{dG}{du}\right).$$

Dès à présent, et sans avoir besoin de connaître ma méthode, les géomètres peuvent vérifier cette formule. Il n'ont qu'à développer les différentiations indiquées, et ils retrouveront la longue formule de M. Gauss, dont je donne ainsi l'expression concise.

Maintenant, soit ρ_u le rayon de courbure géodésique de la ligne (u), je veux dire de la ligne tracée sur la surface, en vertu de cette condition $u =$ constante; soit de même ρ_v le rayon de courbure géodésique de la ligne (v); enfin, soit ω l'angle sous lequel les deux lignes (u) et (v) se coupent. Je démontre que l'équation ci-dessus revient à celle-ci :

$$\frac{D}{RR} = \frac{d\,\omega}{du\,dv} + \frac{d}{dv}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right).$$

On a encore

$$\frac{D}{RR} = \frac{d}{dv}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_\omega}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right).$$

ρ_ω désignant le rayon de courbure géodésique d'une ligne qui d'abord tangente à la ligne (v) s'en écarterait ensuite, du moins si l'angle ω est variable, pour couper toutes les courbes (u) sous un même angle. Cela rappelle une formule du même genre que j'ai donnée dans les Notes de la cinquième édition de l'*Analyse appliquée* de Monge; mais je supposais alors l'angle ω droit, tandis qu'à présent il est quelconque.

Peut-être est-il bon de rappeler le sens que j'attache à ces mots *rayon de courbure géodésique*, et en même temps de fixer le signe que les rayons ρ_u, ρ_v, ρ_ω doivent prendre dans nos formules. Soient i l'angle sous lequel une courbe donnée coupe les courbes (u), $i + di$ ce que cet angle devient quand on passe d'un élément ds de cette courbe à l'élément suivant, $i + \delta i$ ce qu'il deviendrait pour une ligne géodésique tangente. La différence $\delta i - di$ est ce que j'appelle l'*angle*

de contingence géodésique ; et l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial i - dt}{ds}$$

définit, quant à la grandeur et quant au signe, le rayon de courbure géodésique ρ.

Je transcris ici la valeur développée de ρ à laquelle cette définition conduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} = &- \frac{dt}{ds} + \frac{\sqrt{G}}{2D^2}\left(\frac{F}{G}\frac{dG}{du} - \frac{dE}{dv}\right)\sin i \\ &+ \frac{\sqrt{E}}{2D^2}\left(\frac{dG}{du} + \frac{F}{G}\frac{dG}{dv} - 2\frac{dF}{dv}\right)\sin(\omega - i).\end{aligned}$$

De nombreuses conséquences des formules précédentes ont été indiquées dans mes leçons.

Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques;

PAR J. LIOUVILLE.

1. J'ai présenté, il y a longtemps, sur ce sujet, à l'Académie des Sciences, et fait insérer dans le tome XVIII des *Comptes rendus* (pages 883 et 910; séances des 13 et 20 mai 1844) deux Notes que je crois devoir reproduire ici en les complétant. La première est ainsi conçue :

« Pour donner des exemples de fractions continues dont on puisse démontrer en toute rigueur que leur valeur n'est racine d'aucune équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

$a, b, \ldots, g, h$ étant des entiers, il suffit de se rappeler que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p}{q}$ étant deux réduites successives de la fraction continue qui exprime le développement d'une racine incommensurable x de cette équation, le quotient incomplet μ, qui vient après la réduite $\frac{p}{q}$, et sert à former la réduite suivante, finira (cela résulte d'une formule de Lagrange, *voyez* les Mémoires de Berlin, année 1768) par être, pour des valeurs de q très-grandes, constamment inférieur à

$$\pm \frac{df(p, q)}{qf(p, q)\,dp},$$

expression essentiellement positive où l'on suppose

$$f(p, q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \ldots + hq^n.$$

» Abstraction faite des signes, on aura dès lors, à plus forte raison,

$$\mu < \frac{df(p, q)}{q^{n-1}},$$

puisque $f(p, q)$ est un entier égal au moins à l'unité si l'on admet (ce qui est permis) que l'équation

$$f(x) = 0$$

a été débarrassée de tout facteur commensurable; $f(p, q) = 0$ donnerait, en effet,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

» Maintenant représentons par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$; l'inégalité ci-dessus deviendra

$$\mu < q^{n-2} f'\left(\frac{p}{q}\right).$$

Or, $f'\left(\frac{p}{q}\right)$ est une quantité finie qui tend vers la limite $f'(x)$, comme $\frac{p}{q}$ vers la limite x. En désignant par A un certain nombre fixe supérieur à cette limite, on sera donc certain d'avoir

$$\mu < A q^{n-2}.$$

» Ainsi, *les quotients incomplets d'une fraction continue représentant la racine x d'une équation algébrique de degré n, à coefficients rationnels, sont assujettis à ne jamais dépasser le produit d'un certain nombre constant par la puissance $(n-2)^{\text{ième}}$ du dénominateur de la réduite précédente.*

» Il suffira de donner aux quotients incomplets μ un mode de formation qui les fasse grandir au delà du terme indiqué, pour obtenir des fractions continues dont la valeur ne pourra satisfaire à aucune équation algébrique proprement dite; cela arrivera, par exemple, si, partant d'un premier quotient incomplet quelconque, on forme chacun des suivants μ à l'aide de la réduite $\frac{p}{q}$ qui le précède, d'après la

loi $\mu = q''$, ou bien encore d'après la loi $\mu = q^m$, m étant l'indice du rang de μ.

» Au reste, la méthode précédente, qui s'est offerte la première, n'est ni la seule ni même la plus simple qu'on puisse employer. Ajoutons qu'il y a aussi des théorèmes analogues pour les séries ordinaires. Nous citerons en particulier la série

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1+2}} + \frac{1}{l^{1+2+3}} + \ldots + \frac{1}{l^{1+2+\ldots+m}} + \ldots$$

l étant un nombre entier. »

2. La seconde Note contient une démonstration nouvelle et plus simple du théorème auquel j'avais été conduit par la formule citée de Lagrange. La vraie force de notre méthode est, comme on va le voir, indépendante de cette formule.

« Soient x, x_1, x_2,..., x_{n-1} les n racines (la première réelle, les autres réelles ou imaginaires) de l'équation algébrique

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

que l'on peut supposer irréductible, et où a, b,..., g, h sont des entiers positifs, nuls ou négatifs, comme on voudra. Désignons par $\frac{p_0}{q}$, $\frac{p}{q}$ deux réduites consécutives de la fraction continue dans laquelle x se développe; et par z le quotient complet qui vient après, en sorte que l'on ait

$$\frac{p}{q} - x = \pm \frac{1}{q(qz + q_0)}.$$

Enfin, posons

$$f(p, q) = q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = ap^n + bp^{n-1}q + \ldots + hq^n.$$

» Par la décomposition de $f\left(\frac{p}{q}\right)$ en facteurs, opérée à l'aide des racines x, x_1,..., x_{n-1}, on trouve

$$\frac{p}{q} - x = \pm \frac{1}{q(qz + q_0)} = \frac{f(p, q)}{q^n . a\left(\frac{p}{q} - x_1\right) \cdots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)}$$

» Or, à mesure que la réduite $\frac{p}{q}$ converge vers x, la quantité

$$a\left(\frac{p}{q} - x_1\right)\cdots\left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)$$

converge aussi vers une limite finie, savoir,

$$a(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1});$$

il y a donc un certain maximum A au-dessous duquel elle restera toujours. D'un autre côté, $f(p, q)$ est un nombre entier, au moins égal à l'unité, abstraction faite du signe. On a donc

$$\frac{1}{q + qz + q_1} > \frac{1}{Aq^n},$$

d'où

$$z < Aq^{n-2} - \frac{q_1}{q} < Aq^{n-2}.$$

inégalité qui subsiste, à plus forte raison, quand on substitue au quotient complet z la partie entière qu'il contient, c'est-à-dire le quotient incomplet μ. Le théorème que nous avions en vue est ainsi démontré d'une manière simple, sans qu'on ait eu besoin de recourir à la formule de Lagrange dont nous avions d'abord fait usage. On peut, du reste, appliquer une méthode semblable aux divers genres de développements dont les quantités irrationnelles sont susceptibles, et obtenir par là des résultats intéressants. »

5. Ajoutons à ce qui précède quelques développements. Considérons toujours une racine réelle x de l'équation, irréductible et à coefficients entiers,

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

qui, si n est > 1, aura aussi ces autres racines $x_1, \ldots, x_{n-1}$, essentiellement irrationnelles ou imaginaires et différentes de x. Mais cessons de nous assujettir à employer, pour approcher de plus en plus de x, des réduites de fraction continue, et servons-nous de fractions $\frac{p}{q}$

quelconques. En faisant, comme ci-dessus,

$$f(p, q) = ap^n + bp^{n-1}q + \ldots + hq^n.$$

nous serons certains, si n est > 1, que la valeur absolue de l'entier $f(p, q)$ est au moins égale à l'unité, et nous tirerons encore de l'équation

$$\frac{p}{q} - x = \frac{f(p, q)}{q^n . a\left(\frac{p}{q} - x_1\right) \cdots \left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)}$$

cette conséquence, qu'en désignant par A un certain nombre fixe, on doit avoir (abstraction faite du signe) pour toutes les fractions $\frac{p}{q}$ dont nous nous servons actuellement,

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}.$$

Mais le cas de $n = 1$ doit être à son tour examiné de près. Ce cas ne pouvait pas se présenter tout à l'heure; car par cela même qu'on supposait la fraction continue, dans laquelle on développait x, composée d'un nombre infini de termes, on avait x irrationnelle et $n > 1$. Mais ici, tout en continuant à supposer en nombre infini les fractions successives $\frac{p}{q}$ dont x est la limite, on doit regarder comme possible le cas de $n = 1$.

Pour traiter ce cas, soit donc

$$f(x) = ax + b = 0.$$

d'où

$$\frac{p}{q} - x = \frac{ap + bq}{aq}.$$

S'il pouvait arriver que le numérateur $ap + bq$ fût nul, nous ne pourrions tirer de là aucune conclusion. Mais si nous nous sommes assurés par un moyen quelconque que l'on n'a jamais

$$ap + bq = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{p}{q},$$

nous pourrons affirmer dès lors que l'on a

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{aq},$$

ou bien

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq},$$

en écrivant A au lieu de a. La formule générale

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}$$

subsistera donc même dans le cas de $n = 1$.

Cela posé, admettons qu'une quantité x soit telle, qu'en formant des fractions $\frac{p}{q}$ en nombre indéfini et tendantes vers x, mais dont aucune ne soit précisément égale à x, on finisse par reconnaître que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}$$

n'a pas toujours lieu. Il faudra en conclure que x ne peut être racine d'une équation de degré n. Ajoutons que x ne sera racine d'aucune équation de degré inférieur i; car ayant

$$\frac{p}{q} - x < \frac{1}{Aq^n},$$

on aura, à fortiori,

$$\frac{p}{q} - x < \frac{1}{Aq^i}$$

pour tout exposant i moindre que n. Ainsi, ayant constaté que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq}$$

est en défaut, on en conclura que la valeur de x n'est pas rationnelle. Si l'inégalité d'ordre plus élevé

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^2}$$

est inadmissible, on en conclura que x n'est ni rationnelle, ni même racine d'une équation du second degré; et ainsi de suite. Enfin, s'il arrive que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}$$

se trouve généralement en défaut quelque nombre fini qu'on prenne pour n, on pourra affirmer que x n'est pas même une irrationnelle algébrique.

4. Soit, par exemple,

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1.2}} + \frac{1}{l^{1.2.3}} + \ldots + \frac{1}{l^{1.2\ldots m}} + \ldots,$$

l étant un nombre entier. En ramenant à la forme $\frac{p}{q}$ la valeur approchée, mais essentiellement trop petite de x, que donnent les m premiers termes de la série, on aura

$$q = l^{1.2\ldots m}$$

et

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{l^{1.2\ldots m(m+1)}} + \ldots < \frac{2}{q^{m+1}}.$$

Quand l'exposant m grandit indéfiniment, cette dernière quantité décroît plus rapidement que toute fraction ayant un numérateur constant et un dénominateur proportionnel à une puissance donnée de q, en sorte que l'inégalité

$$\frac{p}{q} - x > \frac{1}{Aq^n}$$

finit toujours par être en défaut. J'en conclus que x n'est ni rationnelle, ni même exprimable par des irrationnelles algébriques.

On arrivera facilement à une conclusion semblable pour la série beaucoup plus générale

$$x = \frac{k_1}{l} + \frac{k_2}{l^{1.2}} + \frac{k_3}{l^{1.2.3}} + \ldots + \frac{k_m}{l^{1.2.\ldots m}} + \ldots,$$

$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m, \ldots$ désignant des nombres entiers, positifs ou négatifs, dont la valeur absolue ne dépasse pas un certain maximum k. En prenant donc $l = 10$, et $k_1, k_2, \ldots$, à volonté, de 0 à 9, on formera des fractions décimales indéfinies dont la valeur ne pourra jamais s'exprimer algébriquement. Je crois me souvenir qu'on trouve un théorème de ce genre, énoncé dans une lettre de Goldbach à Euler; mais je ne sache pas que la démonstration en ait jamais été donnée.

Maintenant posons

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l^3} + \ldots + \frac{1}{l^{m^2}} + \ldots$$

En prenant toujours pour valeur approchée de x la somme des m premiers termes de la série, nous aurons

$$q = l^{m^2}$$

et

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{l^{m+1}} + \ldots < \frac{2}{l^{2m+1}q}.$$

Cette dernière quantité, renfermant au dénominateur le produit de q par l^{2m+1} qui grandit avec m, finira par décroître plus rapidement que $\frac{1}{Aq}$. Mais tout ce qu'on peut conclure de là, c'est que x n'est pas rationnelle.

Comme nouvel exemple, soit

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l^3} + \ldots + \frac{1}{l_m} + \ldots,$$

l étant un entier, et chaque terme ayant pour dénominateur la

$(n+1)^{\text{ième}}$ puissance du dénominateur précédent, de sorte que

$$l_m = l_{m-1}^{n+1}.$$

Il est clair que l_{m-1} sera une puissance de l : par suite, on pourra prendre

$$q = l_{m-1}$$

et

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{l_m} + \ldots < \frac{2}{q^{n+}}.$$

Donc x ne sera racine d'aucune équation algébrique de degré égal ou inférieur à n.

On aurait encore d'autres exemples, en considérant la série

$$x = \frac{1}{l} + \frac{1}{ll_1} + \frac{1}{ll_1 l_2} + \ldots + \frac{1}{ll_1 l_2 \ldots l_{m-1}} + \ldots,$$

où l, l_1, l_2,..., l_{m-1},... désignent des nombres entiers de plus en plus grands. Cette circonstance que l_m croît au delà de toute limite suffit d'abord pour que x ne puisse être rationnelle. Et si l_m croît assez rapidement avec l'indice m, on sera certain que x n'est pas même une irrationnelle algébrique.

5. Observons en terminant que, si l'on voulait supposer a, b,..., g, h imaginaires et entiers complexes, c'est-à-dire de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α et β étant des entiers réels, puis tendre vers une racine imaginaire x de l'équation

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + gx + h = 0,$$

à l'aide de fractions $\frac{p}{q}$ dont les deux termes seraient aussi des entiers complexes, on retrouverait encore l'équation

$$\frac{p}{q} - x = \frac{f(p,q)}{q^n . a\left(\frac{p}{q} - x_1\right)\cdots\left(\frac{p}{q} - x_{n-1}\right)},$$

et en substituant aux imaginaires leurs modules, on en déduirait

facilement

$$\text{mod.}\left(\frac{p}{q} - x\right) > \frac{1}{A \cdot \text{mod.}\, q^{n}},$$

ce qui permet d'étendre aux imaginaires les résultats que nous venons de développer pour des quantités réelles. On reconnaît ainsi, par exemple, que, quel que soit l'entier complexe l, la somme de la série

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1.2}} + \frac{1}{l^{1.2.3}} + \ldots + \frac{1}{l^{1.2.\ldots m}} + \ldots$$

n'est jamais exprimable algébriquement.

NOTE SUR UNE FORMULE D'ABEL;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Dans un chapitre [*] intitulé : *Sur quelques intégrales définies*, Abel a rassemblé un grand nombre de formules qui sont extrêmement remarquables, tant pour leur généralité que pour leur élégance. Parmi les résultats qui s'y trouvent, il y en a un qui contient comme cas très-particulier le beau théorème de Legendre sur les fonctions elliptiques des deux premières espèces à modules complémentaires. Le voici :

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+1)}$$

$$= a\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^\beta}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\,dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\gamma}$$

$$+(1-a)\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\,dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\gamma}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}.$$

Je ne sais pas si l'on a remarqué encore que cette formule peut se déduire immédiatement du théorème célèbre de M. Dirichlet. En effet, rappelons-nous qu'on a, en vertu de ce théorème,

$$\iiint x^{k-1}y^{l-1}z^{m-1}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}+\frac{l}{2}+\frac{m}{2}\right)},$$

où les limites des variables se déterminent par l'inégalité

$$x^2+y^2+z^2 \overset{=}{<} 1.$$

[*] Tome Ier des *Œuvres d'Abel*, page 93.

En intégrant par rapport à z et en transformant l'intégrale double qui en résulte par la substitution des coordonnées elliptico-sphériques, savoir,

$$x = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

on parviendra tout de suite à une formule où les variables se séparent d'elles-mêmes, et qui n'est autre chose que le théorème d'Abel. Il est évident qu'en généralisant cette marche, ce qui peut se faire sans la moindre difficulté, on arrivera à une formule analogue, relativement au cas de sommes de produits de n intégrales définies. Cette généralisation ne me semble pas être indiquée par la méthode suivie par Abel.

Je crois devoir rappeler l'attention des géomètres sur le rapprochement que je viens de faire, et qui me paraît ouvrir une application très-étendue et très-féconde du système des coordonnées elliptiques. On parviendra ainsi d'un manière simple à une foule de propriétés des intégrales à différentielles algébriques et à indices quelconques. Je me propose de revenir sur ce sujet important à une autre occasion.

Dublin, le 24 Février 1851.

SUR

UNE QUESTION RELATIVE AUX DÉTERMINANTS;

PAR M. BAZIN,

Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

On demande n séries de m quantités :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, \ldots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta', \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \delta'', \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, & \delta^{(n-1)}, \ldots \end{array}\right\},$$

telles, que tous les déterminants à n^2 lettres que l'on peut former en combinant n quantités quelconques de la première série, α, β, γ,..., θ, avec les $n(n-1)$ quantités α', β', γ',..., α'', β'', γ'',..., $\alpha^{(n-1)}$, $\beta^{(n-1)}$, $\gamma^{(n-1)}$,..., $\theta^{(n-1)}$ qui leur correspondent dans les autres séries, soient égaux à des valeurs données.

Il est clair, d'après l'énoncé de la question, que le nombre des équations est plus grand que le nombre des inconnues; il doit donc y avoir entre les valeurs assignées aux déterminants des équations de condition. Établissons avant tout ces relations.

Nous désignerons, en général, par $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ le déterminant d'un système de n^2 quantités :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots, & \theta \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \ldots, & \theta' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \ldots, & \theta'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(n-1)}, & \beta^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)}, \ldots, & \theta^{(n-1)} \end{array}\right\}.$$

Nous pouvons faire dériver tous les déterminants qui résultent des combinaisons des mn inconnues, de l'un d'eux pris arbitrairement, $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ par exemple, en changeant dans le symbole $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ une ou plusieurs des n lettres α, β, γ,..., θ en d'autres lettres quelconques de la première ligne du tableau (1).

Posons, pour abréger,

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta) = \Delta;$$

nous appellerons déterminants dérivés du premier ordre ceux qui se déduisent de Δ par le changement d'une seule lettre; et nous les représenterons, en général, par le symbole $\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, dans lequel la lettre du dénominateur est la lettre effacée dans l'expression $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, et la lettre du numérateur celle qui lui est substituée, de telle sorte que $\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ est égal à $(\lambda\beta\gamma\ldots\theta)$.

Nous appellerons, de même, déterminants dérivés du deuxième, du troisième,..., du $n^{\text{ième}}$ ordre, ceux qui se déduisent de Δ par le changement de deux, trois...., n lettres; et nous les représenterons par les notations $\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right)$, $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}\right)$,..., $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu\ldots\varphi}{\alpha\beta\gamma\ldots\theta}\right)$ en inscrivant au dénominateur les lettres effacées dans Δ, et au numérateur dans un ordre correspondant celles qui les remplacent; ces expressions ne sont ainsi que les abréviations des expressions $(\lambda\mu\gamma\ldots\theta)$, $(\lambda\mu\nu\ldots\theta)$,..., $(\lambda\mu\nu\ldots\varphi)$.

Ceci posé, on a, quel que soit λ,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta\lambda = \alpha\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \gamma\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) + \ldots + \theta\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\\
\Delta\lambda' = \alpha'\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta'\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \gamma'\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) + \ldots + \theta'\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\\
\Delta\lambda'' = \alpha''\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta''\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \gamma''\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) + \ldots + \theta''\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}.$$

En effet, on a

$$\Delta = \alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} + \alpha'\frac{d\Delta}{d\alpha'} + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \lambda\frac{d\Delta}{d\alpha} + \lambda'\frac{d\Delta}{d\alpha'} + \ldots,$$

de même

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) = \lambda\frac{d\Delta}{d\beta} + \lambda'\frac{d\Delta}{d\beta'} + \ldots.$$

. . . . . .

Substituant ces valeurs dans les équations (3), on voit sans peine qu'elles deviennent identiques.

Nous allons maintenant faire voir comment les déterminants dérivés de tous les ordres supérieurs au premier peuvent s'exprimer simplement en fonction de ceux du premier.

Considérons d'abord ceux du second ordre, par exemple $\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right)$ ou $(\lambda\mu\gamma\ldots\theta)$.

Si l'on se reporte aux équations (3), on voit que le système

$$\left\{\begin{array}{llll} \lambda, & \mu, & \gamma,\ldots, & \theta \\ \lambda', & \mu', & \gamma',\ldots, & \theta' \\ \lambda'', & \mu'', & \gamma'',\ldots, & \theta'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{(n-1)}, & \mu^{(n-1)}, & \gamma^{(n-1)},\ldots, & \theta^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

résulte de la composition du système (2) avec le suivant :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), & 0, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right), & 0, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\gamma}\right), & 1, & 0, & 0,\ldots, & 0 \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\delta}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\delta}\right), & 0, & 1, & 0,\ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right), & \frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{\mu}{\theta}\right), & 0, & 0, & 0,\ldots, & 1 \end{array}\right\}.$$

En appelant K le déterminant du système (4), on a donc

$$\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right) = K\Delta.$$

Mais il est évident, d'après la forme du système (4), que K est égal au déterminant

$$\frac{\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}{\Delta}\cdot\frac{\Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right)}{\Delta}\quad\frac{\Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)}{\Delta}\cdot\frac{\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)}{\Delta}.$$

On a donc

$$\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\cdot\Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right) - \Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)\right].$$

On verrait de même que $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}\right)$ est égal à $\frac{1}{\Delta^2}K'$, K′ étant le déterminant du système

$$\left\{\begin{matrix} \Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\alpha}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\beta}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\gamma}\right) \end{matrix}\right\}.$$

En général, le déterminant dérivé de l'ordre h, $\Delta\left(\frac{\lambda\mu\nu\ldots\pi}{\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon}\right)$, est exprimé par la formule

$$\Delta\left(\frac{\lambda\mu\ldots\pi}{\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon}\right) = \frac{1}{\Delta^h}\cdot\text{determ. du syst.}\left\{\begin{matrix} \Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\alpha}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)\cdots\cdots & \Delta\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\beta}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\beta}\right)\cdots\cdots & \Delta\left(\frac{\pi}{\beta}\right) \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\gamma}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\gamma}\right)\cdots\cdots & \Delta\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right), & \Delta\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right), & \Delta\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)\cdots\cdots & \Delta\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right) \end{matrix}\right\}.$$

Il résulte de ce qui précède que tous les déterminants sont connus si l'on donne simplement la valeur de l'un d'eux, Δ, et de ses $n(m-n)$ dérivés du premier ordre; en sorte que les équations du problème

seront contradictoires ou se réduiront simplement à $n(m-n)+1$, équations distinctes dont les autres ne sont que des conséquences.

Ces équations, qui s'obtiennent en égalant les déterminants aux valeurs assignées par l'énoncé, peuvent être remplacées par d'autres plus simples. Représentons les valeurs numériques des déterminants en changeant simplement les parenthèses en crochets, de telle sorte que

$$\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right],\quad \Delta\left[\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right],\ldots$$

représentent les valeurs que doivent avoir

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right),\quad \Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right),\ldots\quad \text{etc.}$$

Soit, en outre, $[\Delta]$ celle de Δ. On a, quel que soit λ, les n équations du premier degré :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} [\Delta]\lambda = \alpha\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + \beta\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + \gamma\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots, \\ [\Delta]\lambda' = \alpha'\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + \beta'\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + \gamma'\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\Delta]\lambda^{n-1} = \alpha^{n-1}\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + \beta^{n-1}\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + \gamma^{n-1}\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots \end{array}\right.$$

En remplaçant successivement dans ces équations la lettre λ par chacune des $m-n$ lettres qui ne figurent pas dans l'expression $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, nous obtiendrons $n(m-n)$ équations du premier degré. Tout système de valeurs qui les rendra identiques jouit de la propriété suivante : les déterminants formés avec ces valeurs des inconnues sont proportionnels aux valeurs numériques qu'ils devraient avoir d'après l'énoncé de la question.

En effet, d'après les équations (6), le système

$$\left\{\begin{array}{lllll} \lambda, & \beta, & \gamma, \ldots, & \delta \\ \lambda', & \beta', & \gamma', \ldots, & \delta' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{n-1}, & \beta^{n-1}, & \gamma^{n-1}, \ldots, & \theta^{n-1} \end{array}\right\},$$

résulte évidemment de la composition du système (2) avec le suivant :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}, & 1, & 0, \ldots, & 0 \\ \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 1, \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\theta}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0, \ldots, & 1 \end{array}\right\}.$$

On a donc

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \Delta \times M,$$

M étant le déterminant du système (7). Mais

$$M = \frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]};$$

d'où résulte

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{\lambda}{\alpha}\right)}{\Delta} = \frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}.$$

On voit de même que le système

$$\left\{\begin{array}{lllll} \lambda, & \mu, & \gamma, & \delta, \ldots, & \theta \\ \lambda', & \mu', & \gamma', & \delta', \ldots, & \theta' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{n-1}, & \mu^{n-1}, & \gamma^{n-1}, & \delta^{n-1}, \ldots, & \theta^{n-1} \end{array}\right\},$$

étant composé du système (2) et du suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll}
\dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\alpha}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0 \ldots, & 0 \\
\dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\beta}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\
\dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\gamma}\right]}{[\Delta]}, & 1, & 0, \ldots, & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\theta}\right]}{[\Delta]}, & \dfrac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\theta}\right]}{[\Delta]}, & 0, & 0, \ldots, & 1
\end{array}\right\},$$

on a

$$\Delta\left(\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right) = \Delta\left\{\frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} \cdot \frac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\beta}\right]}{[\Delta]} - \frac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\alpha}\right]}{[\Delta]} \cdot \frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}\right\}$$

Mais, d'après les équations de condition qui lient les valeurs numériques des déterminants

$$\frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} \cdot \frac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\beta}\right]}{[\Delta]} - \frac{\Delta\left[\dfrac{\mu}{\alpha}\right]}{[\Delta]} \cdot \frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} = \frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right]}{[\Delta]},$$

on a donc

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right)}{\Delta} = \frac{\Delta\left[\dfrac{\lambda\mu}{\alpha\beta}\right]}{[\Delta]}.$$

Le même raisonnement peut s'appliquer aux déterminants d'ordre quelconque; par conséquent, nous pouvons prendre pour équations du problème les $n(m-n)$ équations (6), en y ajoutant la suivante :

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta) = [\Delta].$$

Supposons maintenant que nous ayons obtenu un système de valeurs pour nos mn inconnues et voyons comment tous les autres peuvent s'en déduire.

Soient

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{llll} M, & N, & P,\ldots, & S \\ M', & N', & P',\ldots, & S' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M^{(n-1)}, & N^{(n-1)}, & P^{(n-1)}, \ldots, & S^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

n^2 quantités quelconques liées seulement par la relation

$$(MNP\ldots S) = 1,$$

et $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots, a^{(n-1)}, b^{(n-1)}, c^{(n-1)}, \ldots$ un système de valeurs pour les mn inconnues de la question. Si l'on pose

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = M\,a + N\,a' + P\,a'' + \ldots + S\,a^{(n-1)}, \\ b_1 = M\,b + N\,b' + P\,b'' + \ldots + S\,b^{(n-1)}, \\ c_1 = M\,c + N\,c' + P\,c'' + \ldots + S\,c^{(n-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_1 = M'\,a + N'\,a' + P'\,a'' + \ldots + S'\,a^{(n-1)}, \\ b'_1 = M'\,b + N'\,b' + P'\,b'' + \ldots + S'\,b^{(n-1)}, \\ c'_1 = M'\,c + N'\,c' + P'\,c'' + \ldots + S'\,c^{(n-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a''_1 = M''\,a + N''\,a' + P''\,a'' + \ldots + S''\,a^{(n-1)}, \\ b''_1 = M''\,b + N''\,b' + P''\,b'' + \ldots + S''\,b^{(n-1)}, \\ c''_1 = M''\,c + N''\,c' + P''\,c'' + \ldots + S''\,c^{(n-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

les mn quantités $a_1, b_1, c_1, \ldots, a'_1, b'_1, c'_1, \ldots, a_1^{(n-1)}, b_1^{(n-1)}, c_1^{(n-1)}, \ldots$ seront un nouveau système de valeurs satisfaisant à la question. En effet, un déterminant quelconque formé avec ces quantités est évidemment égal au déterminant formé avec celles qui leur correspondent dans la série $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots, a^{(n-1)}, b^{(n-1)}, c^{(n-1)}, \ldots$, multiplié par $(MNP\ldots S)$, qui est l'unité.

Réciproquement, si l'on connaît deux systèmes de valeurs $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots, a'', b'', c'', \ldots; a_1, b_1, c_1, \ldots, a'_1, b'_1, c'_1, \ldots, a''_1, b''_1, c''_1, \ldots$, etc.,

on peut toujours en déduire n^2 quantités M, N, P,..., M′, N′, P′,... satisfaisant aux équations (9) et à la condition $(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S}) = 1$. En effet, considérons spécialement celles des quantités a, b, c,... qui entrent dans la composition du déterminant $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, c'est-à-dire $a, b, c, \ldots, t$; $a', b', c', \ldots, t'$; $a'', b'', c'', \ldots, t''$,..., etc.; on peut toujours trouver n^2 nombres M, N, P,..., M′, N′, P′,..., tels que :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_1 = \mathrm{M}\,a + \mathrm{N}\,a' + \mathrm{P}\,a'' + \ldots,\\
b_1 = \mathrm{M}\,b + \mathrm{N}\,b' + \mathrm{P}\,b'' + \ldots,\\
c_1 = \mathrm{M}\,c + \mathrm{N}\,c' + \mathrm{P}\,c'' + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_1 = \mathrm{M}\,t + \mathrm{N}\,t' + \mathrm{P}\,t'' + \ldots.\\
a'_1 = \mathrm{M}'\,a + \mathrm{N}'\,a' + \mathrm{P}'\,a'' + \ldots,\\
b'_1 = \mathrm{M}'\,b + \mathrm{N}'\,b' + \mathrm{P}'\,b'' + \ldots,\\
c'_1 = \mathrm{M}'\,c + \mathrm{N}'\,c' + \mathrm{P}'\,c'' + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t'_1 = \mathrm{M}'\,t + \mathrm{N}'\,t' + \mathrm{P}'\,t'' + \ldots,\\
a''_1 = \mathrm{M}''\,a + \mathrm{N}''\,a' + \mathrm{P}''\,a'' + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Soit maintenant l une lettre non comprise dans les n lettres a, b, c,..., t.

On a

$$[\Delta]\,l_1 = a_1\,\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right] + b_1\,\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right] + c_1\,\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right] + \ldots.$$

Remplaçons a_1, b_1, c_1,... par leurs valeurs en fonction de a, b, c,... tirées des équations (10); il vient, en divisant par $[\Delta]$,

$$\begin{aligned}
l_1 = \mathrm{M}&\left\{a\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + c\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]} + \ldots\right\}\\
+\,\mathrm{N}&\left\{a'\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b'\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + c'\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]} + \ldots\right\}\\
+\,\mathrm{P}&\left\{a''\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]} + b''\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]} + c''\,\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\gamma}\right]}{[\Delta]} + \ldots\right\}\\
+\,&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais on a vu plus haut que

$$a\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}+b\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}+\ldots=l,$$

$$a'\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]}{[\Delta]}+b'\frac{\Delta\left[\frac{\lambda}{\beta}\right]}{[\Delta]}+\ldots=l',$$

. . . . . .

D'où résulte enfin

$$l_1=\mathrm{M}l+\mathrm{N}l'+\mathrm{P}l''+\ldots.$$

Les équations (9) sont donc satisfaites, et, par suite, l'équation

$$(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S})=1,$$

qui n'en est qu'une conséquence.

On voit, par ce qui précède, que toutes les solutions de la question peuvent s'obtenir sans peine dès que l'on en connaît une seule, puisqu'il suffit de la combiner avec tous les systèmes de n^2 quantités satisfaisant à l'équation indéterminée

$$(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S})=1.$$

Or il est facile de trouver une solution; nous avons ramené le problème à rendre identiques les équations du premier degré (6) et l'équation

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)=[\Delta];$$

considérons d'abord cette dernière, elle peut s'écrire

$$\alpha\frac{d\Delta}{d\alpha}+\beta\frac{d\Delta}{d\beta}+\ldots+\theta\frac{d\Delta}{d\theta}=[\Delta].$$

Si l'on attribue à α', β', γ',..., α'', β'', γ'',..., $\alpha^{(n-1)}$, $\beta^{(n-1)}$, $\gamma^{(n-1)}$,... des valeurs quelconques, les expressions $\frac{d\Delta}{d\alpha}$, $\frac{d\Delta}{d\beta}$,... qui ne renferment que ces quantités prendront des valeurs déterminées, et l'on pourra toujours trouver pour α, β, γ,..., θ des valeurs qui satisfassent à l'équation précédente.

En substituant dans les équations (6) les valeurs des n^2 inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$, on obtiendra immédiatement celles de toutes les autres inconnues.

On obtient ainsi pour les inconnues un système de valeurs $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots, a'', b'', c'', \ldots$; ensuite les formules (10) donneront toutes les solutions si l'on y remplace successivement M, N, P,..., M′, N′, P′,... par tous les systèmes qui satisfont à l'équation

$$(\mathrm{MNP}\ldots\mathrm{S}) = 1.$$

Nous avons de cette manière les expressions générales des inconnues en fonction de n^2 arbitraires liées par une seule équation de condition.

Ces expressions peuvent être écrites sous une autre forme moins simple, mais plus symétrique. Établissons d'abord certaines équations de condition qui existent entre les déterminants, et qui sont une simple conséquence des précédentes.

Supposons qu'au lieu de faire dériver tous les déterminants de Δ ou $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$, nous les fassions dériver d'un autre déterminant quelconque

$$\Delta_1 = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\theta_1);$$

à chaque lettre λ répondent, dans chaque hypothèse, n dérivés du premier ordre,

$$\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \quad \Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), \quad \Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right), \ldots$$

dans le premier cas,

$$\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right), \quad \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right), \quad \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\gamma_1}\right), \ldots$$

dans le second; les déterminants de la première de ces deux séries peuvent s'exprimer en fonction de ceux de la seconde et de n^2 quantités qui resteront les mêmes, quelle que soit la lettre λ que l'on considère.

Dans l'équation

$$\Delta\lambda = \alpha\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \ldots + \theta\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right),$$

remplaçons λ par

$$\frac{1}{\Delta_1}\left\{\alpha_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right) + \beta_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right) + \ldots + \theta_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\theta_1}\right)\right\}.$$

il vient

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\alpha_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right) + \beta_1\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right) + \ldots\right\} = \frac{1}{\Delta}\left\{\alpha\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + \ldots\right\}.$$

Mais on a

$$\Delta\alpha_1 = \alpha\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right) + \ldots,$$

$$\Delta\beta_1 = \alpha\Delta\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right) + \ldots.$$

$$\Delta\gamma_1 = \alpha\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right) + \beta\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\beta}\right) + \ldots,$$

. . . . . .

Substituons ces valeurs dans l'équation précédente, et égalons les coefficients de α, β, γ,... dans les deux membres; nous avons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) + \ldots\right\}.\\
\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) &= \frac{1}{\Delta}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right) + \ldots\right\}.\\
\Delta\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\gamma}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right) + \ldots\right\}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta\left(\frac{\lambda}{\theta}\right) &= \frac{1}{\Delta}\left\{\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\right)\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\theta}\right) + \Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Delta\left(\frac{\beta_1}{\theta}\right) + \ldots\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules font voir que le passage des déterminants $\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)\ldots$ aux déterminants $\Delta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, $\Delta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)\ldots$, s'opérera comme une simple transformation de coordonnées, quel que soit λ, au moyen de

la substitution linéaire

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right),\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right),\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right),\ldots,\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\theta_1}{\alpha}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right),\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right),\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\beta}\right),\ldots,\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\theta_1}{\beta}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\alpha_1}{\theta}\right),\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\beta_1}{\theta}\right),\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\gamma_1}{\theta}\right),\ldots,\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right) \end{array}\right\},$$

Revenons maintenant à la solution du problème principal.

Soit

$$\Delta_1 = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\theta_1),$$

l'un quelconque des déterminants A, B, C,..., T, n constantes arbitraires; formons les m quantités

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} A\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + C\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\gamma_1}\right] + \ldots + T\Delta_1\left[\frac{\alpha}{\theta_1}\right], \\ A\Delta_1\left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B\Delta_1\left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + C\Delta_1\left[\frac{\beta}{\gamma_1}\right] + \ldots + T\Delta_1\left[\frac{\beta}{\beta}\right], \\ A\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + C\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\gamma_1}\right] + \ldots + T\Delta_1\left[\frac{\gamma}{\theta_1}\right]; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

répétons cette même opération sur tous les déterminants en introduisant pour chacun d'eux n constantes arbitraires nouvelles, formons la somme de toutes les quantités analogues à la première des expressions (13), ce que nous indiquerons en plaçant devant cette expression le signe $\sum$; faisons de même celle de toutes les quantités analogues à la seconde de ces expressions, et ainsi de suite.

Et posons

$$\left\{\begin{array}{l}
\alpha = \sum \left\{ A\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\beta = \sum \left\{ A\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\gamma = \sum \left\{ A\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{Soient de même} \\
\alpha' = \sum \left\{ A'\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B'\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\beta' = \sum \left\{ A'\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B'\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\gamma' = \sum \left\{ A'\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B'\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha'' = \sum \left\{ A''\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\alpha_1}\right] + B''\,\Delta_1 \left[\frac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\beta'' = \sum \left\{ A''\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\alpha_1}\right] + B''\,\Delta_1 \left[\frac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\gamma'' = \sum \left\{ A''\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\alpha_1}\right] + B''\,\Delta_1 \left[\frac{\gamma}{\beta_1}\right] + \ldots \right\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \quad (11)$$

A′, B′, C′,..., A″, B″, C″,... étant de nouvelles arbitraires.

Il est facile de s'assurer, en ayant égard aux équations de condition (11), que ces expressions satisfont bien aux équations (6); mais, pour qu'elles rendent aussi identique l'équation

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\theta) = [\Delta],$$

il faut établir une relation entre les indéterminées A, B, C,..., A′, B′, C′,..., A″, B″, C″,.... Cette équation s'obtient en formant le déterminant $(\alpha\beta\gamma\ldots\theta)$ à l'aide des valeurs précédentes des inconnues, et l'égalant à $[\Delta]$, son premier membre sera évidemment une fonction

linéaire des déterminants que l'on peut former par les combinaisons des indéterminées A, B, C,...; nous le désignerons par

$$\sum M_1 (ABC\ldots T),$$

et nous écrirons l'équation de condition ainsi,

$$\sum M_1 (ABC\ldots T) = [\Delta].$$

On pourra toujours y satisfaire: en effet, donnons-nous arbitrairement A′, B′, C′,..., A″, B″, C″,...; le premier membre de cette équation se réduira à une fonction linéaire de A, B, C,.... Nous obtenons donc ainsi une solution du problème; en l'introduisant dans les formules (10), nous aurons les expressions les plus générales des inconnues. Cette substitution nous donne

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \sum\left\{(MA + NA' + PA'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\dfrac{\alpha}{\alpha_1}\right] + (MB + NB' + PB'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\dfrac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots\right\}, \\ \beta = \sum\left\{(MA + NA' + PA'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\dfrac{\beta}{\alpha_1}\right] + (MB + NB' + PB'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\dfrac{\beta}{\beta_1}\right] + \ldots\right\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha' = \sum\left\{(M'A + N'A' + P'A'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\dfrac{\alpha}{\alpha_1}\right] + (M'B + N'B' + P'B'' + \ldots)\,\Delta_1\left[\dfrac{\alpha}{\beta_1}\right] + \ldots\right\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si l'on pose maintenant

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} MA + NA' + PA'' + \ldots = A_1, \\ MB + NB' + PB'' + \ldots = B_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ M'A + N'A' + P'A'' + \ldots = A'_1, \\ M'B + N'B' + P'B'' + \ldots = B'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

on voit que les expressions (15) ne diffèrent plus des expressions (14) que par le changement de A, B, C,..., A′, B′, C′,..., en A_1, B_1, C_1,...,

A'_1, B'_1, C'_1,.... Il résulte d'ailleurs des équations (16) que les quantités A_1, B_1, C_1,..., etc., satisfont aussi à l'équation

$$\sum M_1 (A_1 B_1 C_1 \ldots T_1) = [\Delta].$$

Les expressions (15) ne sont donc pas plus générales que les expressions (14); d'où il résulte enfin que ces dernières donneront toutes les solutions de la question, si l'on y substitue pour A, B, C,..., A', B', C',..., tous les systèmes de valeurs satisfaisant à l'équation de condition

$$\sum M_1 (ABC \ldots T) = [\Delta].$$

SUR

LA THÉORIE DE LA COMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. BAZIN,

Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Nous nous proposons de présenter ici d'une manière qui nous paraît plus simple la théorie de la composition des formes quadratiques dont M. Gauss s'est occupé aux n^os^ **235** et suivants des *Disquisitiones arithmeticæ*.

Soient

$$f = (a, b, c), \quad f' = (a', b', c')$$

deux formes quadratiques, et

$$F = (A, B, C)$$

une troisième forme qui puisse être transformée en ff' par la substitution

$$S \quad \begin{cases} X = x'(\alpha_1 x + \beta_1 y) + y'(\alpha_2 x + \beta_2 y), \\ Y = x'(\alpha'_1 x + \beta'_1 y) + y'(\alpha'_2 x + \beta'_2 y). \end{cases}$$

Si l'on peut trouver pour les huit coefficients α_1, β_1, etc., des valeurs entières telles, que les six déterminants

$$\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1, \quad \alpha_2\beta'_2 - \beta_2\alpha'_2, \quad \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1,$$
$$\beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1, \quad \alpha_1\beta'_2 - \beta_2\alpha'_1, \quad \alpha_2\beta'_1 - \beta_1\alpha'_2,$$

n'aient aucun diviseur commun, F sera dite la forme composée de f et de f'.

Supposons f et f' données et proposons-nous de déterminer une forme F qui remplisse les conditions précédentes.

Le problème n'est possible que si les deux formes données satisfont à une condition qu'il est facile d'établir à priori. Soient D, D', D_1 les déterminants de f, f', F; si dans la formule (s) on fait

$$x' = 1, \quad y' = 0,$$

on voit que la substitution

$$X = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad Y = \alpha'_1 x + \beta'_1 y$$

doit transformer F en $a'f$; on a donc

$$D_1(\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1)^2 = Da'^2.$$

Le quotient $\frac{D}{D_1}$ doit donc être un carré, par la même raison $\frac{D'}{D_1}$ doit être aussi un carré; par suite, il en est de même de $\frac{D}{D'}$.

Faisons

$$\frac{D}{D_1} = n^2, \quad \frac{D'}{D_1} = n'^2,$$

et représentons, pour abréger, par

$$(\alpha_1\beta_1), \quad (\alpha_2\beta_2), \quad (\alpha_1\alpha_2), \quad (\beta_1\beta_2), \quad (\alpha_1\beta_2), \quad (\alpha_2\beta_1),$$

les six déterminants dont il a été question plus haut; nous avons

$$(\alpha_1\beta_1) = a'n, \quad (\alpha_2\beta_2) = c'n, \quad (\alpha_1\alpha_2) = an', \quad (\beta_1\beta_2) = cn';$$

chacune des deux quantités n et n' est censée précédée du signe $\pm$.

Ceci posé, formons les neuf équations d'où dépend la solution du problème; elles s'obtiennent simplement en effectuant dans F la substitution (s) et identifiant le résultat avec ff'; si nous désignons par $\frac{dF}{d\alpha_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'_1}$ les dérivées par rapport à α_1 et α'_1 de l'expression

$$A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\alpha'_1 + C\alpha'^2_1,$$

par $\frac{dF}{d\beta_1}$, $\frac{dF}{d\beta'_1}$ des expressions analogues en β_1, etc...., ces neuf equa-

tions pourront s'écrire

$$(1)\qquad \alpha_1 \frac{dF}{d\alpha} + \alpha'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1} = 2aa',$$

$$(2)\qquad \beta_1 \frac{dF}{d\beta} + \beta'_1 \frac{dF}{d\beta'_1} = 2ca',$$

$$(3)\qquad \alpha_2 \frac{dF}{d\alpha} + \alpha'_2 \frac{dF}{d\alpha'_2} = 2ac',$$

$$(4)\qquad \beta_2 \frac{dF}{d\beta_2} + \beta'_2 \frac{dF}{d\beta'_2} = 2cc',$$

$$(5)\qquad \beta_1 \frac{dF}{d\alpha} + \beta'_1 \frac{dF}{d\alpha'} = 2ba',$$

$$(6)\qquad \alpha_2 \frac{dF}{d\alpha_2} + \alpha'_2 \frac{dF}{d\alpha'_1} = 2b'a,$$

$$(7)\qquad \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_2} + \beta'_2 \frac{dF}{d\alpha'_2} = 2bc',$$

$$(8)\qquad \beta_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \beta'_2 \frac{dF}{d\beta'_1} = 2b'c,$$

$$(9)\qquad \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \alpha'_2 \frac{dF}{d\beta'_1} + \beta_2 \frac{dF}{d\alpha} + \beta'_2 \frac{dF}{d\alpha'} = 4bb'.$$

Remarquons que l'expression

$$\beta_1 \frac{dF}{d\alpha} + \beta'_1 \frac{dF}{d\alpha'}$$

peut aussi s'écrire

$$\alpha_1 \frac{dF}{d\beta_1} + \alpha'_1 \frac{dF}{d\beta'_1};$$

il en est de même de toutes les expressions analogues.

Des équations (1) et (5) on tire, en se rappelant que $(\alpha_1 \beta_1) = a'n$,

$$(10)\qquad \frac{dF}{d\alpha_1} = \frac{2(a\beta'_1 - b\alpha'_1)}{n}, \quad \frac{dF}{d\alpha'_1} = \frac{2(b\alpha_1 - a\beta_1)}{n}.$$

Mais, en combinant les équations (1) et (6), on a aussi

$$(11)\qquad \frac{dF}{d\alpha} = \frac{2(a\alpha'_2 - b'\alpha'_1)}{n'}, \quad \frac{dF}{d\alpha'_1} = \frac{2(b'\alpha - a\alpha_2)}{n'}.$$

Égalons ces deux systèmes de valeurs, il vient

$$(12)\quad \begin{cases} an'\beta_1 - a'n\alpha_2 + (b'n - bn')\alpha_1 = 0, \\ an'\beta'_1 - a'n\alpha'_2 + (b'n - bn')\alpha'_1 = 0. \end{cases}$$

Le calcul que nous venons de faire pour α_1 peut se répéter pour β_1, α_2 et β_2, et l'on obtient ainsi par de simples permutations de lettres les six relations :

$$(13)\quad \begin{cases} cn'\alpha_1 + a'n\beta_2 - (b'n + bn')\beta_1 = 0, \\ c'n\alpha_1 + an'\beta_2 - (b'n + bn')\alpha_2 = 0, \\ c'n\beta_1 - cn'\alpha_2 + (bn' - b'n)\beta_2 = 0, \\ cn'\alpha'_1 + a'n\beta'_2 - (b'n + bn')\beta'_1 = 0, \\ c'n\alpha'_1 + an'\beta'_2 - (b'n + bn')\alpha'_2 = 0, \\ c'n\beta'_1 - cn'\alpha'_2 + (bn' - b'n)\beta'_2 = 0 \end{cases}$$

Il est clair en même temps que les équations (10) et (11) et les équations analogues en β_1, α_2 et β_2 sont bien équivalentes aux équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8). On déduit de ces relations une conséquence remarquable. Multiplions par β'_1 le première des équations (12), par β_1 la seconde, et retranchons, il vient

$$\frac{(\alpha_2\beta_1)}{a'n} = \frac{(\alpha_1\beta_1)}{b'n - bn'}.$$

Les équations (13) donneront de même

$$(14)\quad \frac{(\alpha_2\beta_1)}{a'n} = \frac{(\alpha_1\beta_1)}{c'n}, \quad \frac{(\alpha_1\beta_2)}{an'} = \frac{(\beta_1\beta_2)}{cn'} = \frac{(\alpha_1\beta_1)}{bn' + b'n},$$

par conséquent,

$$(\alpha_2\beta_1) = b'n - bn', \quad (\alpha_1\beta_2) = bn' + bn'.$$

Ces six déterminants doivent du reste satisfaire à l'équation identique

$$(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2) - (\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_2) - (\alpha_1\alpha_2)(\beta_1\beta_2) = 0;$$

et ils y satisfont en effet, pourvu que chacune des deux lettres n et n' garde le même signe dans toutes les expressions où elle se trouve : ce signe peut d'ailleurs être indifféremment + ou —.

La valeur absolue de ces deux quantités s'obtient au moyen des considérations suivantes, empruntées aux *Disq. arith.* Soient m le plus grand commun diviseur de a, $2b$, c, m' le plus grand commun diviseur de a', $2b'$, c', Δ le plus grand commun diviseur des six déterminants $(\alpha_1 \beta_1)$, etc.; Δ divise mn' et $m'n$, qui doivent être des entiers; par conséquent $D_1 \Delta^2$ divise Dm'^2 et $D'm^2$. Réciproquement, tout diviseur commun de mn' et $m'n$ divise Δ. Donc $D_1 \Delta^2$ est le plus grand commun diviseur de Dm'^2 et $D'm^2$. Pour la forme composée $D_1 \Delta^2 = D_1$, on connaît donc D_1, et, par suite, n et n'; et cette valeur de D_1 rend bien mn' et $m'n$ entiers. On satisfait aux équations (15), en posant

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= M'an' + M''a'n + M'''(b'n + bn'),\\
\beta_1 &= -Man' + M''(b'n - bn') + M'''c'n,\\
\alpha_2 &= -Ma'n - M'(b'n - bn') + M'''cn',\\
\beta_2 &= -M(bn' + b'n) - M'c'n - M''cn',\\
\alpha'_1 &= N'an' + N''a'n + N'''(b'n + bn'),\\
\beta'_1 &= -Nan' + N''(b'n - bn') + N'''c'n,\\
\alpha'_2 &= -Na'n - N'(b'n - bn') + N'''cn',\\
\beta'_2 &= -N(bn' + b'n) - N'c'n - N''cn'.
\end{aligned}$$

M, M', M'', etc., étant des nombres entiers; on satisfera de plus aux six équations

$$(\alpha_1 \beta_1) = a'n, \quad (\alpha_2 \beta_2) = c'n, \ldots,$$

pourvu que l'on satisfasse à l'une quelconque d'entre elles : il suffit, pour cela, d'assujettir les huit nombres M, M', etc., à une condition facile à trouver. Prenons les quatre nombres N, N', N'', N''', arbitrairement, et faisons

$$\begin{aligned}
N'an' + N''a'n + N'''(b'n + bn') &= \mu h_1,\\
-Nan' + N''(b'n - bn') + N'''c'n &= \mu k_1,\\
-Na'n - N'(b'n - bn') + N'''cn' &= \mu h_2,\\
-N(bn' + b'n) - N'c'n - N''cn' &= \mu k_2,
\end{aligned}$$

μ étant le plus grand commun diviseur des premiers membres.

On s'assurera par une simple substitution, en ayant égard aux équations (13), que la condition $(\alpha_1\beta_1) = a'n$, et, par suite, les cinq conditions analogues, sont satisfaites en prenant

$$\alpha'_1 = h_1, \quad \beta'_1 = k_1, \quad \alpha'_2 = h_2, \quad \beta'_2 = k^2,$$

$$\alpha_1 = \mathrm{M}'an + \mathrm{M}''a'n + \mathrm{M}'''(b'n + bn'), \quad \beta_1 = -\mathrm{M}an' + \ldots, \quad \text{etc.},$$

pourvu que les quatre nombres M, M′, M″, M‴ satisfassent à l'équation

$$\mathrm{M}h_1 + \mathrm{M}'k_1 + \mathrm{M}''h_2 + \mathrm{M}'''k_2 = 1.$$

Il ne reste plus, pour achever la solution du problème, qu'à déterminer A, B, C; or nous avons

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha} = 2(\mathrm{A}\alpha_1 + \mathrm{B}\alpha'_1), \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta} = 2(\mathrm{A}\beta_1 + \mathrm{B}\beta'_1), \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha'} = 2(\mathrm{B}\alpha_1 + \mathrm{C}\alpha'_1), \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta'} = 2(\mathrm{B}\beta_1 + \mathrm{C}\beta'_1), \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha_2} = 2(\mathrm{A}\alpha_2 + \mathrm{B}\alpha'_2), \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta_2} = 2(\mathrm{A}\beta_2 + \mathrm{B}\beta'_2), \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha'_2} = 2(\mathrm{B}\alpha_2 + \mathrm{C}\alpha'_2), \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta'^2} = 2(\mathrm{B}\beta^2 + \mathrm{C}\beta'^2). \end{cases}$$

Des deux équations (15), on tire

$$\mathrm{A} = \frac{\beta'_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha} - \alpha'_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta}}{2(\alpha_1\beta'_1)}, \quad \mathrm{B} = \frac{\alpha_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta} - \beta_1 \dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha}}{2(\alpha_1\beta'_1)},$$

expressions qui deviennent, en remplaçant $\dfrac{d\mathrm{F}}{d\alpha}$ et $\dfrac{d\mathrm{F}}{d\beta}$ par leurs va

leurs $\frac{2(a'\alpha_2 - b'\alpha_1)}{n'}$, $\frac{2(a'\beta_2 - b'\beta_1)}{n'}$,

$$A = \frac{\beta'_1\alpha'_2 - \alpha'_1\beta'_2}{nn'}, \quad B = \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \beta_1\alpha_2 - \beta'_1\alpha}{nn'}$$

Les équations (16) donnent de même

$$B = \frac{\alpha_1\beta'_2 + \alpha'_1\beta_2 - \beta_1\alpha'_2 - \beta'_1\alpha_2}{nn'}, \quad C = \frac{\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2}{nn'}.$$

Enfin le même calcul, appliqué aux équations (17) et (18), reproduit encore les mêmes valeurs de A, B, C; ces valeurs seront entières, car en substituant pour α_1, β_1, etc., les expressions écrites plus haut, on trouve

$$A = H + K\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'},$$

$$B = H_1 + K_1\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'},$$

$$C = H_2 + K_2\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'}.$$

H_1, K_1, etc., étant des fonctions entières des huit indéterminées M, M′, etc., et des coefficients a, b, c, a', b', c'. Or

$$\frac{Dn'^2 + D'n^2}{nn'} = 2D, \quad nn' = 2\sqrt{DD'} = \text{un entier}.$$

Soit M le plus grand commun diviseur de A, 2B, C; la forme des fonctions H, K, etc., fait voir que M est divisible par $m.m'$; réciproquement, les équations (1), (2),..., (9), montrent que mm' est divisible par M, donc

$$M = m.m'.$$

Nous n'avons pas eu égard à l'équation (9), parce qu'en effet elle n'est qu'une conséquence des huit autres; si l'on y substitue les valeurs trouvées pour les inconnues, elle devient identique.

Les coefficients de la forme composée étant exprimés en fonction de huit indéterminées M, M′, etc., prendront diverses valeurs suivant celles que l'on donnera à ces indéterminées; mais toutes les formes composées que l'on obtiendra ainsi sont équivalentes. En effet, soit

F_1 une autre forme composée qui se transforme en ff' par la substitution

$$X = x'(\gamma_1 x + \delta_1 y) + y'(\gamma_2 x + \delta_2 y),$$
$$Y = x'(\gamma'_1 x + \delta'_1 y) + y'(\gamma'_2 x + \delta'_2 y),$$

on aura

$$(\gamma_1 \delta_1) = a'n,$$

et, par conséquent,

$$(\alpha_1 \beta_1) = \pm (\gamma_1 \delta_1),$$

suivant que n aura été pris avec le même signe ou avec des signes différents; dans les deux cas, on pourra donc trouver quatre nombres P, Q, P′, Q′ tels, que

$$\gamma_1 = P\alpha_1 + Q\alpha'_1, \quad \gamma'_1 = P'\alpha_1 + Q'\alpha'_1, \quad PQ' - P'Q = \pm 1,$$
$$\delta_1 = P\beta_1 + Q\beta'_1, \quad \delta'_1 = P'\beta_1 + Q'\beta'_1.$$

Ceci posé, puisque la substitution

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{matrix}\right\}$$

transforme F en $a'f$, on pourra déduire F de $a'f$ en faisant dans cette dernière forme la substitution inverse

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\beta'_1}{(\alpha\beta'_1)} & \dfrac{-\beta}{(\alpha\beta'_1)} \\ \dfrac{-\alpha'}{(\alpha\beta'_1)} & \dfrac{\alpha}{(\alpha\beta'_1)} \end{matrix}\right\}.$$

Mais $a'f$ se déduit de F_1 par la substitution

$$\left\{\begin{matrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma'_1 & \delta'_1 \end{matrix}\right\},$$

laquelle, en vertu des équations précédentes, équivaut aux deux substitutions successives

$$\left\{\begin{matrix} P & Q \\ P' & Q' \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{matrix}\right\}.$$

F peut donc se déduire de F_1 par trois substitutions successives

$$\begin{Bmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \dfrac{\beta'_1}{(\alpha_1\beta_1)} & \dfrac{-\beta_1}{(\alpha_1\beta_1)} \\ \dfrac{-\alpha'_1}{(\alpha_1\beta_1)} & \dfrac{\alpha_1}{(\alpha_1\beta_1)} \end{Bmatrix}.$$

Les deux dernières se détruisent réciproquement, de sorte qu'il ne reste que la première; $PQ' - P'Q$ étant égal à ± 1, F_1 et F sont équivalentes.

Supposons maintenant que l'on ait trois formes f, f', f''.

Soient m, m', m'' les plus grands communs diviseurs de a, $2b$, c; a', $2b'$, c'; a'', $2b''$, c''; D, D', D'' les déterminants de f, f', f''; calculons la forme composée φ de f et f'; son déterminant Δ est égal au plus grand commun diviseur de Dm'^2 et $D'm^2$, et le plus grand commun diviseur M' de ses trois coefficients égal à mm'. Composons maintenant φ et f''; nous obtiendrons une nouvelle forme F qui sera transformable en $ff'f''$ par une substitution, telle que

$$\begin{aligned} X &= x''[x'(\alpha_1 x + \beta_1 y) + y'(\alpha_2 x + \beta_2 y)] \\ &\quad + y''[x'(\gamma_1 x + \delta_1 y) + y'(\gamma_2 x + \delta_2 y)], \\ Y &= x''[x'(\alpha'_1 x + \beta'_1 y) + y'(\alpha'_2 x + \beta'_2 y)] \\ &\quad + y''[x'(\gamma'_1 x + \delta'_1 y) + y'(\gamma'_2 x + \delta'_2 y)]. \end{aligned}$$

Son déterminant D_1 sera le plus grand commun diviseur de $D''M'^2$ et de $\Delta m''^2$, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur de $Dm'^2m''^2$, $D'm^2m''^2$, $D''m^2m'^2$. Cette forme sera une forme composée de f, f', f''. Quel que soit l'ordre dans lequel on compose f, f', f'', on retombera toujours sur des formes équivalentes. En effet, si dans la formule de substitution précédente, on pose

$$x'' = 1, \quad y'' = 0, \quad x' = 1, \quad y' = 0,$$

on voit sans peine que l'on a

$$(\alpha_1\beta_1)^2 D_1 = D a'^2 a''^2.$$

Si une autre forme F_1 est également transformable en $ff'f''$ par

une substitution

$$\begin{aligned} X &= x''[x'(\varepsilon_1 x + \zeta_1 y) + y'(\varepsilon_2 x + \zeta_2 y)] \\ &\quad + y''[x'(\eta_1 x + \theta_1 y) + y'(\eta_2 x + \theta_2 y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= x''[x'(\varepsilon'_1 x + \zeta'_1 y) + y'(\varepsilon'_2 x + \zeta'_2 y)] \\ &\quad + y''[x'(\eta'_1 x + \theta'_1 y) + y'(\eta'_2 x + \theta'_2 y)], \end{aligned}$$

on aura aussi

$$\varepsilon_1 \zeta_1 (\varepsilon'_2 \zeta'_2 - \varepsilon'_1 \zeta'_1) D_1 = D a'^2 a''^2,$$

par conséquent,

$$\varepsilon_1 \zeta_1 (\varepsilon'_2 \zeta'_2 - \varepsilon'_1 \zeta'_1) = \pm (\alpha_1 \beta_1),$$

et l'on prouvera, comme plus haut, que F et F_1 sont équivalentes.

On pourra ainsi composer successivement un nombre quelconque de formes, et les formes composées que l'on obtiendra seront toujours équivalentes, quel que soit l'ordre de composition employé.

MÉMOIRE

SUR

LES VARIATIONS DES COORDONNÉES CURVILIGNES;

PAR M. G. LAMÉ.

Lorsqu'on cherche à faciliter l'intégration des équations qui expriment l'équilibre et le mouvement de la chaleur, ou de l'élasticité, dans des corps solides homogènes de toutes formes, on est conduit à plusieurs questions générales, dont les solutions intéressent à la fois l'analyse des différences partielles, la géométrie, et la physique mathématique. De là sont venues la théorie des surfaces isothermes, celle des coordonnées curvilignes, et la théorie des surfaces isostatiques. C'est une autre question de meme origine que je me propose de traiter aujourd'hui.

On sait que, dans la théorie analytique de la chaleur, l'équation aux différences partielles du premier ordre, appelée *équation à la surface,* contient généralement deux paramètres ou coordonnées variables. Les cas, très-particuliers, du parallélipipède rectangle, du prisme triangulaire régulier, de la sphère et du cylindre droit, sont les seuls où cette équation puisse se réduire à une relation entre des constantes; lesquelles constantes sont introduites par l'intégration de l'équation aux différences partielles du second ordre, qui régit la température de tous les points du solide. Ce sont aussi les seuls cas que l'on puisse traiter d'une manière complète, si le corps perd ou gagne sa chaleur par le rayonnement.

Deux propriétés du système de coordonnées que l'on emploie expliquent cette circonstance. D'abord la surface qui limite le corps s'exprime analytiquement en égalant à une constante l'une des coordonnées, c'est-à-dire que cette surface fait partie d'un système ortho-

gonal. Ensuite le paramètre différentiel du premier ordre est aussi constant sur cette surface, c'est-à-dire qu'elle est partout également distante de la surface infiniment voisine de la même famille. On comprendra maintenant le but que je me suis proposé, en essayant de résoudre le problème suivant, dont la solution aiderait au progrès des théories de physique mathématique :

Une surface donnée fait partie d'un système orthogonal, mais dans lequel le paramètre différentiel du premier ordre de cette surface est variable; il s'agit de trouver tous les systèmes orthogonaux dont cette même surface fait partie, et dans lesquels le paramètre différentiel dont il s'agit est constant; ou, en d'autres termes, de trouver tous les systèmes, tels que la surface proposée y soit partout également distante de la surface infiniment voisine appartenant à la même famille.

On a de suite un système qui jouit de cette propriété, en prenant les surfaces parallèles à la surface proposée, et les deux groupes de surfaces développables formées par ses normales. Mais cet unique système est insuffisant. Il faut que les formules, qui donneront le système orthogonal cherché, contiennent toutes les fonctions arbitraires que comporte la solution, afin qu'on puisse en disposer pour simplifier d'autres intégrations, dans la question de physique mathématique qu'on a en vue; ou bien, pour faire en sorte que la famille de surfaces, à laquelle appartiendra la surface proposée, soit une famille de surfaces isothermes par exemple, ou qu'elle jouisse d'une certaine propriété.

Considéré sous un point de vue aussi étendu, le problème dont il s'agit n'est pas sans difficulté. La solution que j'ai trouvée a toute la généralité désirée; mais je ne suis pas encore parvenu à lui donner une forme commode pour les applications. Le système orthogonal primitif étant donné par les valeurs de trois coordonnées rectilignes, en fonction des trois anciens paramètres, j'obtiens les valeurs de ces mêmes coordonnées, dans le système cherché, par des séries développées suivant les puissances ascendantes de celui des trois nouveaux paramètres, dont la valeur zéro donne la surface proposée. Les termes successifs de ces séries contiennent des fonctions arbitraires assujetties

à vérifier une équation aux différences partielles, à deux variables, fournie par la théorie des surfaces orthogonales. Chaque terme introduit une fonction de cette nature, qui entre dans tous les termes suivants, soit directement, soit par ses dérivées partielles, soit par d'autres fonctions qui s'en déduisent à l'aide de l'intégration. On voit combien cette solution est générale; mais on comprend aussi que, pour l'utiliser, il faudrait sommer les trois séries, ou les présenter sous forme finie. Je ne suis parvenu à effectuer cette sommation, que dans le cas où l'on se borne à la première fonction introduite. Ce succès fait espérer que l'on parviendra à sommer le cas général.

En résumé, au premier système orthogonal, où la surface donnée se trouve conjuguée aux deux groupes de surfaces développables formées par ses normales, j'en joins d'autres dans lesquels aucune surface n'est développable; et je fais voir qu'il existe une infinité de systèmes semblables, remplissant tous la condition posée, c'est-à-dire tels que la surface fixe forme, avec celle qui l'avoisine, une couche d'égale épaisseur. Cette couche infiniment mince est commune à tous les systèmes trouvés, lesquels sont en quelque sorte *tangents* entre eux, et c'est un genre de contact qui me semble se présenter ici pour la première fois. Ces résultats sont obtenus sans rien spécifier sur la nature de la surface donnée, et à l'aide des formules relatives aux coordonnées curvilignes. Ils donnent un nouvel exemple de l'utilité de ces formules, et des ressources qu'elles peuvent offrir aux géomètres.

On reconnaît aisément, dans beaucoup de travaux mathématiques de notre époque, une tendance à se débarrasser des coordonnées rectilignes et polaires, à leur substituer des paramètres, constants sur certains lieux géométriques, variables d'un de ces lieux à un autre de la même famille. C'est par des substitutions de cette nature qu'on est parvenu à étudier de plus près, et avec une simplicité merveilleuse, les propriétés des surfaces courbes, et celles des diverses lignes qu'elles peuvent contenir; à voyager, pour ainsi dire, sur toutes ces surfaces, avec la même facilité qu'autrefois sur le plan et sur la sphère. Le Mémoire actuel me paraît indiquer un nouveau pas à faire dans la même direction : car il ne s'agit plus seulement d'étudier tel système

de coordonnées curvilignes, de l'utiliser pour en déduire les propriétés des surfaces et des lignes qui le composent; il s'agit de modifier ce système lui-même, de le transformer de telle manière, que, conservant certains éléments, il puisse jouir, en outre, de telle propriété qu'il n'avait pas d'abord. C'est une application, sous un point de vue nouveau, de l'idée fondamentale des variations, qui justifie le titre que je donne à ce Mémoire.

Nota. Pour abréger, je désigne à la fois, et séparément, les trois coordonnées x, y, z, par la seule lettre u. Ainsi, toute équation en u représentera un groupe de trois équations analogues, l'une en x, l'autre en y, la troisième en z. En outre, U étant une certaine expression par rapport à u, je désigne par SU la somme des trois formes que prend U, lorsqu'on y remplace successivement u par x, y, z. De même, u' désigne à la fois, et séparément, des coordonnées x', y', z'. La lettre [M] sert de renvoi pour indiquer la première partie de mon Mémoire sur les coordonnées curvilignes, inséré au tome V de ce Journal. Enfin, dans les formules [M] citées, il faut, le plus souvent, remplacer les ρ_i, h_i, par les lettres r_i, η_i, que j'adopte pour le Mémoire actuel.

1. Un système orthogonal, donné par les trois équations du groupe

$$u = \mathrm{U}(\rho, r_1, r_2), \tag{1}$$

contient une surface A, au paramètre $\rho = r$; les deux familles de surfaces aux paramètres r_1, r_2, traçant sur A ses lignes de courbure, r_1, r_2 sont aussi les paramètres de ces lignes elles-mêmes. D'après cela, un second système orthogonal, qui devra contenir la même surface A, sera représenté par un groupe de la forme

$$u' = \mathrm{U}'(\mathrm{R}, r_1, r_2), \tag{2}$$

où la surface A correspond au paramètre $\mathrm{R} = 0$; r_1, r_2 étant les paramètres de ses lignes de courbure.

2. Si l'on désigne par η, η_1, η_2 les paramètres différentiels du premier ordre du système (1), par h, h_1, h_2 ceux du système (2), on

aura, en remplaçant ρ par r, pour plus d'uniformité. [M, (2), (12 *bis*) et (5)],

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{S}\,\dfrac{du}{dr_1}\,\dfrac{du}{dr_2} = \mathrm{S}\,\dfrac{du}{dr_2}\,\dfrac{du}{dr} = \mathrm{S}\,\dfrac{du}{dr}\,\dfrac{du}{dr_1} = 0, \\ \eta^2\,\mathrm{S}\left(\dfrac{du}{dr}\right)^2 = \eta_1^2\,\mathrm{S}\left(\dfrac{du}{dr_1}\right)^2 = \eta_2^2\,\mathrm{S}\left(\dfrac{du}{dr_2}\right)^2 = 1; \end{cases}$$

et il faudra que l'on ait

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{S}\,\dfrac{du'}{dr_1}\,\dfrac{du'}{dr_2} = \mathrm{S}\,\dfrac{du'}{dr_2}\,\dfrac{du'}{d\mathrm{R}} = \mathrm{S}\,\dfrac{du'}{d\mathrm{R}}\,\dfrac{du'}{dr_1} = 0, \\ h^2\,\mathrm{S}\left(\dfrac{du'}{d\mathrm{R}}\right)^2 = h_1^2\,\mathrm{S}\left(\dfrac{du'}{dr_1}\right)^2 = h_2^2\,\mathrm{S}\left(\dfrac{du'}{dr_2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Quand on déduit, du groupe u, le groupe u', le paramètre ρ ou r, qui était variable dans u, devient, dans u', la constante r, valeur particulière du paramètre ρ, pour la surface A.

3. Chacune des trois coordonnées rectilignes u, considérée comme une fonction des trois paramètres r, r_1, r_2, vérifie les six équations suivantes, qui servent de base à notre analyse :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dr\,dr_1} + \dfrac{1}{\eta}\,\dfrac{d\eta}{dr_1}\cdot\dfrac{du}{dr} + \dfrac{1}{\eta_1}\,\dfrac{d\eta_1}{dr}\cdot\dfrac{du}{dr_1} = 0, \\ \dfrac{d^2u}{dr_2\,dr} + \dfrac{1}{\eta_2}\,\dfrac{d\eta_2}{dr}\cdot\dfrac{du}{dr_2} + \dfrac{1}{\eta}\,\dfrac{d\eta}{dr_2}\cdot\dfrac{du}{dr} = 0, \\ \dfrac{d^2u}{dr_1\,dr_2} + \dfrac{1}{\eta_1}\,\dfrac{d\eta_1}{dr_2}\cdot\dfrac{du}{dr_1} + \dfrac{1}{\eta_2}\,\dfrac{d\eta_2}{dr_1}\cdot\dfrac{du}{dr_2} = 0, \\ \dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{1}{\eta}\,\dfrac{d\eta}{dr}\,\dfrac{du}{dr} = \dfrac{\eta_1^2}{\eta^2}\,\dfrac{d\eta}{dr_1}\,\dfrac{du}{dr_1} + \dfrac{\eta_2^2}{\eta^2}\,\dfrac{d\eta}{dr_2}\,\dfrac{du}{dr_2}, \\ \dfrac{d^2u}{dr_1^2} + \dfrac{1}{\eta_1}\,\dfrac{d\eta_1}{dr_1}\,\dfrac{du}{dr_1} = \dfrac{\eta_2^2}{\eta_1^3}\,\dfrac{d\eta_1}{dr_2}\,\dfrac{du}{dr_2} + \dfrac{\eta^2}{\eta_1^3}\,\dfrac{d\eta_1}{dr}\,\dfrac{du}{dr}, \\ \dfrac{d^2u}{dr_2^2} + \dfrac{1}{\eta_2}\,\dfrac{d\eta_2}{dr_2}\,\dfrac{du}{dr_2} = \dfrac{\eta^2}{\eta_2^3}\,\dfrac{d\eta_2}{dr}\,\dfrac{du}{dr} + \dfrac{\eta_1^2}{\eta_2^3}\,\dfrac{d\eta_2}{dr_1}\,\dfrac{du}{dr_1}. \end{cases}$$

Les trois premières de ces six équations se déduisent du § V [M], par les formules (10 *bis*); les trois autres du § VIII [M], par la dernière du premier groupe de formules qu'il contient, laquelle donne la qua-

trième 5), lorsqu'on remplace $\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{du}$, $\frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{du}$, par $r_1\frac{du}{dr}$, $r_2\frac{du}{dr_2}$ [M, (5)], aussi $\frac{d\frac{1}{r}\frac{dr}{du}}{dr}$ par $\frac{dr_1\frac{du}{dr}}{dr}$, ou par $\left(r_1\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{dr_1}{dr}\frac{du}{dr}\right)$, et qu'on divise par r_1.

4. La normale à la surface A fait avec l'axe des u un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\eta}\frac{dr}{du}$; ou $r_1\frac{du}{dr}$; un point de cette normale, situé à une distance R de A, aura donc pour coordonnée

$$u' = u + \mathrm{R}\eta\frac{du}{dr}. \tag{6}$$

Ce groupe (6) représente le système composé des surfaces parallèles à A, et des surfaces développables formées par ses normales. On trouvera facilement, soit par la différentiation, à l'aide des trois dernières (4) et des formules (5), soit directement par des considérations géométriques,

$$\frac{1}{h}=1,\quad \frac{1}{h_1}=\frac{1}{r_1}\left(1-\frac{r_1}{r_1}\frac{dr_1}{dr}\mathrm{R}\right),\quad \frac{1}{h_2}=\frac{1}{r_2}\left(1-\frac{r_2}{r_2}\frac{dr_2}{dr}\mathrm{R}\right). \tag{7}$$

On s'assurera de même que les trois premières équations (4) sont vérifiées. Ainsi le groupe (6) représente un système orthogonal, qui comprend la surface A pour $\mathrm{R}=0$, et tel que le paramètre différentiel h est partout égal à l'unité. Mais il s'agit de trouver tous les systèmes orthogonaux (2) comprenant A, et tels que h soit constant sur la surface A seulement.

5. La solution particulière, donnée par le groupe (6), indique une marche à suivre pour obtenir la solution générale du problème proposé. Si, dans le groupe (1), on change ρ en $r+\lambda$, λ étant une fonction de (R, r_1, r_2), chaque coordonnée u deviendra, par la formule de Taylor,

$$u' = u + \frac{du}{dr}\lambda + \frac{d^2u}{dr^2}\frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dr^3}\frac{\lambda^3}{1.2.3} + \ldots \tag{8}$$

Or les équations (5) donnent les six dérivées partielles du second ordre de u, en fonction linéaire des dérivées du premier; des différentiations successives, et des substitutions faites à l'aide des formules (5), conduiraient aux valeurs des dérivées d'ordres supérieurs,

toujours en fonction linéaire des mêmes dérivées du premier ordre; enfin, ces valeurs étant substituées dans (8), u' pourra se mettre sous la forme

$$(9)\qquad u' = u + m \cdot r_1 \frac{du}{dr} + n \cdot r_{11} \frac{du}{dr_1} + p \cdot r_{12} \frac{du}{dr_2},$$

m, n, p étant des fonctions de R, r_1, r_2. Si l'on parvient à déterminer généralement ces fonctions m, n, p, de telle sorte qu'elles s'évanouissent pour $R = 0$, et que u' (9), vérifiant les trois premières (4), donne $h = 1$ pour $R = 0$, le groupe (9) représentera évidemment le système cherché.

6. Supposons les fonctions m, n, p développées suivant les puissances ascendantes de R; il suffira que ces séries ne contiennent pas de terme indépendant de R pour que le système (9) comprenne A. Si l'on différentie u' (9) par rapport à R, on aura

$$\frac{du'}{dR} = \frac{dm}{dR} \cdot r_1 \frac{du}{dr} + \frac{dn}{dR} \cdot r_{11} \frac{du}{dr_1} + \frac{dp}{dR} \cdot r_{12} \frac{du}{dr_2},$$

d'où l'on conclut, par les formules (3), et l'une des équations (4),

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{dm}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dR}\right)^2.$$

D'après cette valeur, pour que h devienne l'unité quand $R = 0$, il faut et il suffit que la série m ait pour premier terme R, sans autre coefficient que l'unité, et qu'en même temps les séries n et p n'aient pas de terme en R^1. On va voir que ces dernières séries ne peuvent non plus contenir de terme en R^2, c'est-à-dire qu'elles doivent être divisibles par R^3.

7. Si l'on différentie u' (9) par rapport à r_1, qu'on remplace les dérivées partielles du second ordre de u, par leurs valeurs déduites des formules (5), et qu'on pose, pour simplifier,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dm}{dr_1} + \frac{r_1}{r_1^2}\frac{dr_1}{dr} n = M_1, \\ &\frac{1}{r_1} + \frac{du}{dr} - \frac{r_1}{r^2}\frac{dr_1}{dr} m - \frac{r_2}{r^2}\frac{dr_2}{dr} p = N_1, \\ &\frac{dp}{dr} - \frac{r_1}{r}\frac{dr_1}{dr} n = P_1. \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(11)\qquad \frac{du'}{dr_1} = M_1 . \eta \frac{du}{dr} + N_1 . \eta_1 \frac{du}{dr_1} + P_1 . \eta_2 \frac{du}{dr_2}.$$

Pareillement, si l'on différentie u' par rapport à r_2, et qu'on pose

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dm}{dr_2} + \frac{\eta}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr} p = M_2, \\ &\frac{dn}{dr_2} + \frac{\eta_1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr_1} p = N_2, \\ &\frac{1}{\eta_2} + \frac{dp}{dr_2} - \frac{\eta}{\eta_2}\frac{d\eta_2}{dr} m - \frac{\eta_1}{\eta_2^2}\frac{d\eta_2}{dr} n = P_2, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(13)\qquad \frac{du'}{dr_2} = M_2 . \eta \frac{du}{dr} + N_2 . \eta_1 \frac{du}{dr_1} + P_2 . \eta_2 \frac{du}{dr_2}.$$

Enfin, pour la symétrie, posons

$$(14)\qquad \frac{dm}{dR} = M, \quad \frac{dn}{dR} = N, \quad \frac{dp}{dR} = P,$$

on aura, comme plus haut,

$$(15)\qquad \frac{du'}{dR} = M . \eta \frac{du}{dr} + N . \eta_1 \frac{du}{dr_1} + P . \eta_2 \frac{du}{dr_2}.$$

8. Les groupes (11), (13), (15) étant substitués dans les trois premières équations (4), celles-ci deviennent, en ayant égard aux formules (3),

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &M M_1 + N N_1 + P P_1 = 0, \\ &M M_2 + N N_2 + P P_2 = 0, \\ &M_1 M_2 + N_1 N_2 + P_1 P_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont aux différentielles partielles du premier ordre, mais non linéaires, et simultanées; elles doivent être vérifiées par les trois fonctions, ou par les trois séries m, n, p, pour que le groupe (9) représente un système orthogonal. La substitution des mêmes valeurs

(11), (13), (15), dans les trois dernières (4), donne aussi

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{h^2} &= M^2 + N^2 + P^2, \\ \frac{1}{h^2} &= M_1^2 + N_1^2 + P_1^2, \\ \frac{1}{h_2^2} &= M_2^2 + N_2^2 + P_2^2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on réduit m à son premier terme, et qu'on suppose nuls tous les termes de n et p, le groupe (9) devient (6); on a

$$M = 1, \quad N = 0, \quad P = 0,$$

$$M_1 = 0, \quad N_1 = \frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{r_1}{n_1}\frac{dn_1}{dr}R\right), \quad P_1 = 0,$$

$$M_2 = 0, \quad N_2 = 0, \quad P_2 = \frac{1}{r_2}\left(1 - \frac{r_2}{n_2}\frac{dn_2}{dr}R\right);$$

les équations (16) sont satisfaites, et les valeurs (17) deviennent (7). On retrouve ainsi le cas du n° 4.

9. Soient φ, ν, ϖ les coefficients des termes en R^2 dans les séries m, n, p. Les expressions (10) et (14), ordonnées par rapport à R, auront respectivement pour premiers termes,

$$M \ldots\ldots 1, \qquad N \ldots\ldots 2\nu R, \quad P \ldots\ldots 2\varpi R,$$

$$M_1 \ldots\ldots \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{r}{r_1^2}\frac{dn_1}{dr}\nu\right)R^2, \quad N_1 \ldots\ldots \frac{1}{r_1}, \quad P_1 \ldots\ldots \left(\frac{d\varpi}{dr} + \frac{r_2}{n_1^2}\frac{dn_1}{dr}\nu\right)R^2,$$

et, pour que le terme en R^4 soit nul de lui-même dans la première (16), il faut que $\nu = 0$. De même, il faut que $\varpi = 0$, pour que le terme en R^4 disparaisse dans la seconde (16). Soient alors n_1, p_1 les coefficients de R^3 dans n et p; le produit PP_1 sera divisible par R^4; celui NN_1 le sera par R^2, et son premier terme $\frac{3n_1R}{r_1}$ devra détruire le premier terme $\frac{d\varphi}{dr}R^2$ du produit MM_1; on doit donc avoir

$$n_1 = -\frac{1}{3}r_1\frac{d\varphi}{dr};$$

et pareillement

$$\varpi_1 = -\frac{1}{3} r_2 \frac{d\varphi}{dr_2}.$$

En outre, on verra facilement que le premier terme, dans la troisième (16), sera $\left(\frac{1}{r_1^2}\frac{dr_1 n_1}{dr_2} + \frac{1}{r_2^2}\frac{dr_2 p_2}{dr_1}\right) R^3$; et son annulation exige que l'on ait, en substituant à n_1, p_1 leurs valeurs trouvées,

$$(18) \qquad \frac{1}{r_1^2}\frac{dr_1^2 \frac{d\varphi}{dr_1}}{dr_2} + \frac{1}{r_2^2}\frac{dr_2^2 \frac{d\varphi}{dr_2}}{dr_1} = 0,$$

ou, en développant,

$$(18\ bis.) \qquad \frac{d^2\varphi}{dr_1\,dr_2} + \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dr_2}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{dr_1}\frac{d\varphi}{dr_2} = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction φ, coefficient du terme en R^2 dans la série m, doit vérifier la troisième des équations (5).

10. Il suit de là que les séries m, n, p seront de la forme

$$(19) \qquad \begin{cases} m = R + m_0 R^2 + m_1 R^3 + m_2 R^4 + m_3 R^5 + \ldots, \\ n = \qquad\qquad\qquad n_1 R^3 + n_2 R^4 + n_3 R^5 + n_4 R^6 + \ldots, \\ p = \qquad\qquad\qquad p_1 R^3 + p_2 R^4 + p_3 R^5 + p_4 R^6 + \ldots, \end{cases}$$

$m_0 = \varphi$ devant vérifier l'équation (18), et n_1, p_1 étant respectivement égaux à $-\frac{1}{3} r_1 \frac{d\varphi}{dr_1}$, $-\frac{1}{3} r_2 \frac{d\varphi}{dr_2}$. Pour déterminer les formes des autres fonctions m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3,..., il faut substituer les valeurs (19) dans les expressions (14), (10), (12), puis ces expressions transformées dans les premiers membres des équations (16), que l'on ordonne par rapport aux puissances de R; égalant ensuite à zéro les coefficients de ces puissances, on obtient des équations aux différentielles partielles, d'où l'on peut successivement déduire les fonctions cherchées. Je me dispenserai d'entrer dans les détails de cette opération, et j'indiquerai seulement la forme des premières fonctions, écrites dans les séries (19).

11. Désignons par le symbole $D(\varphi)$ le premier membre de l'équa-

tion (18 *bis*); par φ_i une fonction de r_1, r_2, vérifiant l'équation

$$D(\varphi_i) = 0,$$

et d'ailleurs quelconque; par ϖ_i l'expression $\left[\eta_1^2\left(\frac{d\varphi_i}{dr_1}\right)^2 + \eta_2^2\left(\frac{d\varphi_i}{dr_2}\right)^2\right]$; puis posons

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\eta}{\eta_1^2}\dfrac{d\eta_1}{dr} = f_1, & \dfrac{\eta_2}{\eta_1^2}\dfrac{d\eta_1}{dr_2} = g_1, \\[2ex] \dfrac{\eta}{\eta_2^2}\dfrac{d\eta_2}{dr} = f_2, & \dfrac{\eta_1}{\eta_2^2}\dfrac{d\eta_2}{dr_1} = g_2. \end{cases}$$

On s'assure, à l'aide des formules qui régissent les coordonnées curvilignes (M), que, pour toute fonction φ_i, il existe une fonction ψ_i vérifiant les deux équations

$$(21)\qquad \frac{d\psi_i}{dr_1} + f_1\eta_1\frac{d\varphi_i}{dr_1} = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dr_2} + f_2\eta_2\frac{d\varphi_i}{dr_2} = 0.$$

On reconnaît ensuite, à l'aide des mêmes formules, que, pour deux fonctions différentes φ_i, φ_k, il existe une fonction ω qui vérifie les deux équations

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dr_1} = \left(\dfrac{d\eta_1\dfrac{d\varphi_k}{dr_1}}{dr_1} - g_1\eta_2\dfrac{d\varphi_k}{dr_2} - f_1\psi_k\right)\eta_1\dfrac{d\varphi_i}{dr_1}, \\[2ex] \dfrac{d\omega}{dr_2} = \left(\dfrac{d\eta_2\dfrac{d\varphi_k}{dr_2}}{dr_2} - g_2\eta_1\dfrac{d\varphi_k}{dr_1} - f_2\psi_k\right)\eta_2\dfrac{d\varphi_i}{dr_2}, \end{cases}$$

fonction que je désigne par le symbole $\omega_k(\varphi_i)$. Ces deux théorèmes ont été l'objet principal d'une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 14 juillet 1845.

12. Cela posé, les premiers coefficients des trois séries (19) sont donnés par le tableau suivant :

$$
(23)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&m_0 = \varphi, \qquad m_1 = \frac{2}{3}\psi + \varphi_1,\\
&n_1 = -\frac{1}{3}\eta_1\frac{d\varphi}{d\eta_1}, \qquad n_2 = -\frac{1}{4}\eta_1\frac{d(\varphi_1+\varphi^2)}{d\eta_1},\\
&p_1 = -\frac{1}{3}\eta_2\frac{d\varphi}{d\eta_2}, \qquad p_2 = -\frac{1}{4}\eta_2\frac{d(\varphi_1+\varphi)}{d\eta_2};\\
&m_2 = \frac{1}{2}\varphi\psi + \frac{3}{4}\psi_1 + \varphi_2,\\
&n_2 = -\left(\frac{1}{2}\psi + \frac{3}{5}\varphi_1\right)\eta_1\frac{d\varphi}{d\eta_1} - \frac{2}{5}\varphi\cdot\eta_1\frac{d\varphi_1}{d\eta_1} - \frac{1}{5}\eta_1\frac{d\varphi_2}{d\eta_1},\\
&p_2 = -\left(\frac{1}{2}\psi + \frac{3}{5}\varphi_1\right)\eta_2\frac{d\varphi}{d\eta_2} - \frac{2}{5}\varphi\cdot\eta_2\frac{d\varphi}{d\eta_2} - \frac{1}{5}\eta_2\frac{d\varphi_2}{d\eta_2},\\
&m_3 = \frac{1}{3}\psi^2 - \frac{1}{6}\varpi + \frac{2}{5}\psi\varphi_1 + \frac{3}{5}\varphi\psi_1 + \frac{4}{5}\psi_2 + \varphi_3,\\
&n_3 = -\left(\frac{1}{2}\varphi\psi + \frac{3}{5}\psi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2\right)\cdot\eta_1\frac{d\varphi}{d\eta_1} - \left(\frac{2}{5}\psi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)\cdot\eta_1\frac{d\varphi}{d\eta_1}\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{3}\varphi\cdot\eta_1\frac{d\varphi_2}{d\eta_1} - \frac{1}{6}\eta_1\frac{d\varphi_3}{d\eta_1},\\
&p_3 = -\left(\frac{1}{2}\varphi\psi + \frac{3}{5}\psi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2\right)\cdot\eta_2\frac{d\varphi}{d\eta_2} - \left(\frac{2}{5}\psi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)\cdot\eta_2\frac{d\varphi}{d\eta_2}\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{3}\varphi\cdot\eta_2\frac{d\varphi_2}{d\eta_2} - \frac{1}{6}\eta_2\frac{d\varphi_3}{d\eta_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

En résumé, chaque coefficient m_i introduit une nouvelle fonction φ_i, qui apparaît dans n_{i+1}, p_{i+1}, et entre dans la composition de tous les coefficients d'indices plus élevés, soit directement, soit par ses dérivées premières, et par ϖ_i, soit par la fonction ψ_i correspondante, soit enfin par les fonctions $\omega_k(\varphi_i)$, $\omega_i(\varphi_k)$, lesquelles apparaîtraient si l'on prolongeait le tableau (23). Malgré la complication de l'équation aux différences partielles que doit vérifier m_i quand i surpasse 3, et malgré l'étendue des équations d'où l'on déduit directement n_{i+1} et p_{i+1}, on reconnaît aisément que les seules fonctions auxiliaires ψ, ϖ, ω, affectées d'indices convenables, suffisent pour exprimer ces coefficients, quelque loin que l'on prolonge leur recherche. Ainsi les fonctions m,

n, p existent; et il ne s'agirait plus que de sommer les séries (19), qui les représentent, en conservant toute leur généralité. Mais, que m, n, p soient ou non sous forme finie, le groupe (9), après la substitution des valeurs trouvées, représentera tous les systèmes orthogonaux, comprenant la surface A, tels que cette surface est partout également distante de la surface infiniment voisine de la même famille.

13. Voici maintenant le cas particulier dans lequel je parviens à exprimer sous forme finie les séries (19). Considérant que la fonction $\frac{1}{\eta}$ vérifie l'équation

$$D\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0 \quad [\text{M}(16\ ter)],$$

je prends $\varphi = \frac{1}{\eta}$; je suppose nuls tous les autrs φ_i du tableau (23); je joins aux formules (20) celles-ci,

$$(24) \qquad \frac{\eta_1}{\eta^2}\frac{d\eta}{dr_1} = l_1, \qquad \frac{\eta_2}{\eta^2}\frac{d\eta}{dr_2} = l_2.$$

Alors, étudiant et comparant les valeurs données par le tableau (23) prolongé, et qui résultent de ces simplifications, je trouve qu'en posant

$$(25) \qquad \frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\psi R^2\right)+\frac{1}{2}\varphi R}{\left(1-\frac{1}{2}\psi R^2\right)^2+\frac{1}{4}\varpi R^4} = K,$$

les séries (19) s'expriment ainsi :

$$(26) \quad m = \left[\frac{1}{3}+2\left(1-\frac{1}{2}\psi R^2\right)K\right]R, \quad n = l_1 K R^3, \quad p = l_2 K R^3.$$

Au lieu d'exposer la méthode qui m'a conduit à cette sommation, je crois préférable de poser les valeurs (26), puis de prouver, directement, qu'elles donnent au groupe (9) la propriété d'être orthogonal, ou de vérifier les équations (16), et qu'elles conduisent à une valeur h (17) qui se réduit à l'unité quand R est nul.

14. D'abord, les fonctions (20) et (24) donnent [*voyez* M, for-

mules (16) et (17)] :

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{dl}{dr_1} = -l_2 g_2, & \dfrac{dl_1}{dr_1} + \dfrac{df_1}{dr} = l_2 g_1, \\ \dfrac{dl_2}{dr_1} = -l_1 g_1, & \dfrac{dl_2}{dr_1} + \dfrac{df_2}{dr} = l_1 g_2. \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, par la valeur choisie pour φ, et d'apres les définitions de ϖ, de ψ (n° **11**), on a

$$(28)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{r}, & \dfrac{d\varphi}{dr} = -\dfrac{l_1}{r_1}, & \dfrac{d\varphi}{dr_2} = -\dfrac{l_2}{r_2}, \\ \varpi = l_1^2 + l_2^2, & \dfrac{d\varpi}{dr} = -2 l_1 \dfrac{df_1}{dr}, & \dfrac{d\varpi}{dr_2} = -2 l_2 \dfrac{df_2}{dr}, \\ & \dfrac{d\psi}{dr} = l_1 f_1, & \dfrac{d\psi}{dr_2} = l_2 f_2. \end{cases}$$

Si l'on pose, pour simplifier,

$$(29)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{1}{3} + 2\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right) K\right] R = T, \quad R^3 K = Q, \quad \left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right)^2 + \dfrac{1}{4}\varpi R^4 = D, \\ \dfrac{1}{2}\varphi + \varphi T - \varpi Q = L, \quad f_1 T + \dfrac{df}{dr} Q - \dfrac{1}{r_1} = L_1, \quad f_2 T + \dfrac{df_2}{dr} Q - \dfrac{1}{r_2} = L_2. \end{cases}$$

les dérivées partielles de la fraction K (25) deviennent, à l'aide des formules (28),

$$(30)\quad \frac{dK}{dR} = \frac{1}{D} L, \quad \frac{dK}{dr} = \frac{R}{2D} l_1 L_1, \quad \frac{dK}{dr_2} = \frac{R}{2D} l_2 L_2;$$

celles des fonctions m, n, p, (26) en découlent aisément, et leur substitution dans les expressions (14), (10) et (12) donne définitivement

$$(31)\quad \begin{cases} M = \dfrac{1}{R}\left(1 - 2\psi Q\right) - \dfrac{2R}{D}\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right) L, & N = \left(\dfrac{3Q}{R} + \dfrac{R^3}{D} L\right) l_1, & P = \left(\dfrac{3Q}{R} + \dfrac{R^3}{D} L\right) l_2, \\ M = \dfrac{R^2}{D}\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right) l L, & N = \left(\dfrac{R^3}{2D} l^2 - 1\right) L, & P_1 = \dfrac{R^3}{2D} l_1 l L, \\ M_1 = \dfrac{R^2}{D}\left(1 - \dfrac{1}{2}\psi R^2\right) l L_1, & N_1 = \dfrac{R^3}{2D} l l_1 L_1, & P_2 = \left(\dfrac{R^3}{2D} l_2^2 - 1\right) L_2. \end{cases}$$

15. Si l'on représente, pour simplifier, par S l'expression suivante,

$$(32)\quad \frac{R}{D}\left(1-\frac{1}{2}\psi R^2\right)(T-2\psi Q)+3\frac{R^2}{2D}\varpi Q+\frac{R^3}{D}L-3\frac{Q}{R}=S,$$

la substitution des valeurs (31), dans les premiers membres des formules (16), les transforme ainsi :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} MM_1+NN_1+PP_1&=l_1L_1S,\\ MM_2+NN_2+PP_2&=l_2L_2S,\\ M_1M_2+N_1N_2+P_1P_2&=l_1l_2L_1L_2\left(\frac{R^2}{D}-\frac{R^2}{2D}-\frac{R^3}{2D}\right),\end{aligned}\right.$$

en ayant égard à la valeur de ϖ (28), et à celle de D (29). Le second membre de la troisième des équations (33) est nul; et il en est de même des seconds membres des deux autres : car, si l'on substitue dans S (32) les valeurs de T, Q, L, D (29), et K (25), on trouve définitivement $S=0$. Ainsi les équations (16) sont satisfaites. Enfin la substitution des valeurs (31) dans les équations (17) donne, toute réduction faite,

$$\frac{1}{h^2}=\left(4K-\frac{1}{3}\right)^2,\quad \frac{1}{h_1^2}=L_1^2,\quad \frac{1}{h_2^2}=L_2^2,$$

d'où, extrayant les racines, remplaçant L_1, L_2, par leurs valeurs (29), et observant que $R=0$ doit donner $h_1=\eta_1$, $h_2=\eta_2$, il vient

$$(34)\quad \frac{1}{h}=4K-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{h_1}=\frac{1}{\eta_1}-f_1T-\frac{df_1}{dr}Q,\quad \frac{1}{h_2}=\frac{1}{\eta_2}-f_2T-\frac{df_2}{dr}Q.$$

Pour $R=0$, la fraction (25) se réduit à $K=\frac{1}{3}$, et la première (34) donne $h=1$. C'est ce qui restait à démontrer.

16. On remarquera que la fonction ψ, intégrée, contient une constante arbitraire; on peut en introduire une autre dans φ, en posant

$$\varphi=\frac{1}{\eta}+\textit{constante},$$

ce qui ne change rien aux calculs qui précèdent. D'après cela, la solution particulière, donnée par les valeurs (26), est encore fort générale.

Sur la convergence des séries trigonométriques procédant suivant les multiples d'un même arc;

PAR M. H. HOLMGREN.

Dans un Mémoire inséré au Journal de M. Grunert (*Archiv der Mathematik und Physik*), M. Malmsten a démontré que les séries réelles infinies

$$u_0 + u_1 \cos x + u_2 \cos 2x + u_3 \cos 3x + \ldots,$$
$$u_1 \sin x + u_2 \sin 2x + u_3 \sin 3x + \ldots.$$

sont convergentes quand la fonction u_n tendant vers zéro finit par être toujours de même signe et sans cesse numériquement décroissante pour des valeurs croissantes de n; pourvu toutefois que x ne soit pas de la forme $2k\pi$, k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

Voici une nouvelle démonstration de ce théorème remarquable.

Pour comprendre nos deux séries dans un même calcul, considérons la somme

$$\begin{aligned} S_n = {} & u_0 \cos \mu x + u_1 \cos (\mu + 1) x + u_2 \cos (\mu + 2) x + \\ & + u_{n-1} \cos (\mu + n - 1) x + u_n \cos (\mu + n) x, \end{aligned}$$

où μ est une quantité quelconque, et où nous supposons d'abord la fonction u_n quelconque aussi, sauf à lui imposer plus tard des conditions. Multiplions cette somme par $2 \sin \frac{1}{2} x$, puis décomposons chaque terme du second membre d'après la formule

$$2 \sin \frac{1}{2} x \cos (\mu + t) x \equiv \sin \left(\mu + t + \frac{1}{2}\right) x - \sin \left(\mu + t - \frac{1}{2}\right) x.$$

nous aurons

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{1}{2}x\,.\,S_n = {} & u_0 \sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x - u_0\sin\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x \\
& u_1\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x - u_1\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x \\
& u_2\sin\left(\mu+\frac{5}{2}\right)x - u_2\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& u_{n-1}\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x - u_{n-1}\sin\left(\mu+\frac{2n-3}{2}\right)x \\
& u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x - u_n\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x.
\end{aligned}
$$

et, en joignant les termes deux à deux diagonalement,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 2\sin\frac{1}{2}x\,.\,S_n \\
& = -u_0\sin\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x + (u_0-u_1)\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x + (u_1-u_2)\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x + \ldots \\
& + u_{n-1} - u_n)\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x + u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x.
\end{aligned}
\right.
$$

Faisant, pour abréger,

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
& -u_0\sin\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x - (u_0-u_1)\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x + (u_1-u_2)\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x + \ldots \\
& \qquad + (u_{n-1}-u_n)\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x = U_n,
\end{aligned}
\right.
$$

on a

$$
2\sin\frac{1}{2}x\,.\,S_n = U_n + u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x,
$$

d'où

$$
(4)\qquad S_n = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left[U_n + u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x\right].
$$

Cette formule, n'étant qu'une identité, subsiste quel que soit le nombre entier n. Supposant donc n infiniment grand, nous avons

$\lim S_n$ ou la somme de la série infinie

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & u_0 \cos \mu x + u_1 \cos(\mu+1)x + u_2 \cos(\mu+2)x + \ldots \\ & = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left[\lim U_n + \lim u_n \sin\left(\mu + \frac{2n+1}{2}\right)x\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \lim U_n = & -u_0 \sin\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x + (u_0 - u_1)\sin\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x \\ & + (u_1 - u_2)\sin\left(\mu + \frac{3}{2}\right)x + \ldots \end{aligned}\right.$$

est aussi une série infinie; mais on démontre facilement que cette série a une somme *finie* et *déterminée* lorsque la fonction u_n est constamment de même signe et numériquement décroissante pour des valeurs très-grandes et croissantes de n: jusqu'ici, du reste, peu importe que $\lim u_n$ soit égale ou non à zéro.

En effet, supposons que depuis $n = m$ (m étant un nombre *fini* et entier) u_n décroisse constamment en restant, par exemple, positive, et désignons par A la quantité finie et déterminée

$$u_0 \sin\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x + (u_0 - u_1)\sin\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x + (u_1 - u_2)\sin\left(\mu + \frac{3}{2}\right)x + \ldots$$
$$+ (u_{m-1} - u_m)\sin\left(\mu + \frac{2m-1}{2}\right)x;$$

nous aurons, en prenant $n > m$,

$$U_n - A = (u_m - u_{m+1})\sin\left(\mu + \frac{2m+1}{2}\right)x + (u_{m+1} - u_{m+2})\sin\left(\mu + \frac{2m+3}{2}\right)x + \ldots$$
$$+ (u_{n-1} - u_n)\sin\left(\mu + \frac{2n-1}{2}\right)x.$$

Les différences $u_m - u_{m+1}$, $u_{m+1} - u_{m+2}, \ldots$ étant toutes positives, et les facteurs par lesquels elles sont multipliées étant tout au plus égaux à l'unité quant à leurs valeurs numériques, le second membre de cette égalité ne peut pas être numériquement plus grand que la somme

$$(u_m - u_{m+1}) + (u_{m+1} - u_{m+2}) + \ldots + (u_{n-1} - u_n) = u_m - u_n;$$

par conséquent,

$$U_n - A \overset{=}{<} u_m - u_n,$$

en ayant égard seulement à la valeur numérique de $U_n - A$. Or A, u_m et u_n sont toujours des quantités finies; donc U_n et $\lim U_n$ sont aussi des quantités finies.

Pour démontrer que $\lim U_n$ est aussi une quantité déterminée, il suffit de prouver que la somme d'un nombre quelconque de termes qui, dans cette série, suivent le $r^{ième}$ terme, diminue à mesure que r devient plus grand et s'évanouit pour $r = \infty$, puisque alors la quantité finie $\lim U_n$ devient indépendante de n, et, par conséquent, déterminée. Prenons donc un nombre quelconque k de ces termes; nous trouvons, par un raisonnement tout à fait semblable à celui que nous venons d'employer, que la valeur numérique de leur somme

$$(u_r - u_{r-1}) \sin\left(\mu + \frac{2r+1}{2}\right) x + (u_{r-1} - u_{r-2}) \sin\left(\mu + \frac{2r+3}{2}\right) x + \ldots$$
$$+ (u_{r+k-1} - u_{r+k}) \sin\left[\mu + \frac{2(r+k)-1}{2}\right] x,$$

ne peut surpasser $u_r - u_{r+k}$; or, à mesure que r croît, cette différence diminue et s'évanouit lorsque $r = \infty$, puisque, d'après la condition relative à u_n, on a nécessairement

$$\lim u_r = \lim u_{r+k}.$$

Ainsi $\lim U_n$ est une quantité finie et déterminée.

Revenant maintenant à l'équation (5), nous en tirons immédiatement la conclusion suivante :

Pourvu que $\sin \frac{1}{2} x$ *ne soit pas nul ou que* x *ne soit pas de la forme* $2k\pi$ (*k étant un nombre entier positif, nul ou négatif*), *la somme de la série infinie*

$$u_0 \cos \mu x + u_1 \cos(\mu + 1) x + u_2 \cos(\mu + 2) x + u_3 \cos(\mu + 3) x + \ldots$$

est toujours finie lorsque u_n *finit par être constamment de même signe et numériquement décroissante pour des valeurs croissantes du nombre entier* n. *Cette somme est, du reste, déterminée lorsque* $\lim u_n = 0$,

mais indéterminée à cause du facteur $\sin\left(\mu + \frac{2n+1}{2}\right)x$, *dans le cas où* $\lim u_n$ *n'est pas zéro.*

Remarquons d'ailleurs que lorsque $\lim u_n$ diffère de zéro, la formule (5) permet d'assigner complétement le mode d'indétermination de la somme.

Mettons, dans la formule (5), $\mu - \frac{\pi}{2x}$ au lieu de μ, nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & u_0 \sin \mu x + u_1 \sin(\mu+1)x + u_2 \sin(\mu+2)x + \ldots \\ & = -\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left[\lim U_n + \lim u_n \cos\left(\mu + \frac{2n+1}{2}\right)x\right]. \end{aligned}\right.$$

ou

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \lim U_n = & -u_0 \cos\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x + (u_0 - u_1)\cos\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x \\ & + (u_1 - u_2)\cos\left(\mu + \frac{3}{2}\right)x + \ldots \end{aligned}\right.$$

et nous voyons immédiatement que la série infinie

$$u_0 \sin \mu x + u_1 \sin(\mu+1)x + u_2 \sin(\mu+2)x + u_3 \sin(\mu+3)x + \ldots$$

est assujettie aux mêmes conditions de convergence que nous venons de trouver pour la série dont elle dérive.

Pour $\mu = 0$, nous avons les séries traitées par M. Malmsten.

Note sur quelques points de la théorie des surfaces;

PAR M. OSSIAN BONNET.

On a donné, comme l'on sait, le nom d'*ombilic* à tout point d'une surface pour lequel les rayons de courbure des sections principales, et, par suite, les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux entre eux. D'après cela, pour trouver les ombilics, il suffit d'exprimer que l'équation

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}&(rt-s^2)R^2-R\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\\&\qquad+(1+p^2+q^2)^2=0,\end{aligned}\right.$$

qui donne, en général, les rayons de courbure principaux d'une surface, a ses deux racines égales; on obtient ainsi la condition

$$(1)\quad [(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]^2=4(rt-s^2)(1+p^2+q^2).$$

Cette égalité peut se mettre sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[(1+p^2)t-(1+q^2)r+2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)\right]^2\\&\qquad+4(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)^2=0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(3)\quad \frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{s}{pq},$$

ce qui montre que les ombilics satisfont à deux équations indépendamment de l'équation de la surface, et, par conséquent, que ces points sont, en général, en nombre limité pour une même surface.

Ordinairement on ne parvient à mettre la condition (1) sous la forme (2) que d'une manière assez pénible. Or, sans recourir à une décomposition en deux carrés, on peut démontrer comme il suit que les deux relations (3) sont nécessaires pour l'égalité des racines de l'équation (a).

L'équation (a), en posant $R=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D}$, revient à

$$(b)\quad [D(1+p^2)-r][D(1+q^2)-t]=(s-pqD)^2,$$

et c'est même sous cette forme qu'on l'obtient d'abord. (*Voyez*, par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Duhamel.) Si dans cette dernière équation, on substitue successivement à la place de D, les trois nombres

$$-\infty,\quad \frac{r}{1+p^2},\quad +\infty,$$

ou bien les trois suivants :

$$-\infty, \quad \frac{t}{1+q^2}, \quad +\infty,$$

on trouve des signes alternatifs, après avoir tout fait passer dans un membre; cela montre que ces deux systèmes de nombres séparent toujours les racines de l'équation (b); donc, si ces racines sont égales entre elles, elles doivent l'être à $\frac{r}{1+p^2}$ et à $\frac{t}{1+q^2}$, par suite à $\frac{s}{pq}$ d'après l'équation; donc on aura

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}.$$

Réciproquement, si ces relations sont satisfaites, l'équation en D aura ses racines égales, car cette équation et sa dérivée seront vérifiées par $D = \frac{r}{1+p^2}$.

Je saisirai cette occasion pour relever une inexactitude qui m'est échappée dans ma Note sur les ombilics insérée dans le xxxe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. J'ai répété à la page 1, d'après quelques auteurs, que quelle que soit la direction suivant laquelle on chemine sur une surface, on ne trouve jamais deux normales successives qui se rencontrent rigoureusement : à la vérité, la phrase à laquelle je fais allusion est tout à fait isolée dans ma Note, et ce qui suit, relativement aux lignes de courbure, n'en dépend pas et reste parfaitement exact; je crois néanmoins devoir la rectifier en faveur des jeunes élèves qui pourraient me lire. Rien n'est plus simple, du reste, que de s'assurer qu'il existe sur une surface, contrairement à l'assertion précédente, deux lieux de points pour lesquels les normales rencontrent rigoureusement la normale correspondante à un point déterminé m. On voit aussi que ces deux lignes se coupent à angle droit et sont tangentes aux sections principales relatives au point m. M. Liouville s'est servi quelquefois, dans ses cours à l'École Polytechnique, de la considération de ces lignes pour établir les équations des lignes de courbure, et cette méthode est à la fois très-claire et très-simple. Il existe une autre méthode également très-simple pour obtenir les mêmes équations; comme j'ignore si elle a déjà été employée, je vais l'indiquer en peu de mots. Elle consiste à regarder les lignes de courbure comme les lieux des points pour lesquels les normales à la surface forment une surface développable, ou bien sont tangentes à une même courbe, et puis à remarquer que lorsque l'on a les équations

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

d'une série de droites, il suffit, pour exprimer qu'elles sont tangentes à une courbe, de remplacer dans la condition

$$\frac{a' - a}{b' - b} = \frac{p' - p}{q' - q}.$$

qui exprime que deux de ces droites se rencontrent, les accroissements $a' - a$, $b' - b$, $p' - p$, $q' - q$, des paramètres a, b, p, q par leurs différentielles relatives à la variable indépendante dont ils sont supposés fonctions. (Voir une Note de M. Bouquet, tome XI de ce Journal.)

SUR QUELQUES FORMULES

RELATIVES

A LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. J.-A. SERRET.

Quelques-uns des résultats contenus dans l'article qu'on va lire font partie d'une Lettre que j'ai écrite, il y a près de deux ans, à M. Liouville, et qu'il m'a fait l'honneur d'insérer dans une des Notes qu'il vient de publier avec la cinquième édition du chef-d'œuvre de Monge, l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*.

I.

Considérons une courbe à double courbure rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires. Soient M un point de cette courbe; MT la tangente en M; MN la normale *principale*, c'est-à-dire celle qui est située dans le plan osculateur et avec laquelle coïncide le rayon de courbure; ML l'axe du plan osculateur. Je désignerai par α, β, γ; ξ, υ, ζ; λ, μ, ν les angles formés avec les axes coordonnés par les droites MT, MN, ML respectivement; par ds la différentielle de l'arc terminé en M; par $d\varepsilon$ et $d\eta$ les angles de contingence et de torsion; enfin, par ρ et r les rayons de courbure et de torsion, lesquels ont pour valeurs, comme on sait,

$$(1) \qquad \rho = \frac{ds}{d\varepsilon}, \quad r = \frac{ds}{d\eta}.$$

Je me propose d'indiquer ici quelques formules par lesquelles on simplifie considérablement la solution de diverses questions relatives à la théorie des courbes. Ces formules permettent d'exprimer les différentielles des divers ordres des cosinus des trois angles α, ξ, λ, ou β, υ, μ, ou γ, ζ, ν, par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont

les coefficients ne contiennent que ds, r, ρ et leurs différentielles. Je donnerai ensuite quelques exemples qui suffiront pour montrer quel parti on peut tirer de ces formules.

Rappelons d'abord les formules connues

$$(2)\quad \begin{cases} d\varepsilon = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \\ d\eta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}, \end{cases}$$

et

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\xi = \dfrac{d\cos\alpha}{d\varepsilon} = \rho\,\dfrac{d\cos\alpha}{ds}, \\ \cos\upsilon = \dfrac{d\cos\beta}{d\varepsilon} = \rho\,\dfrac{d\cos\beta}{ds}, \\ \cos\zeta = \dfrac{d\cos\gamma}{d\varepsilon} = \rho\,\dfrac{d\cos\gamma}{ds}; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \begin{cases} d\cos\alpha = \cos\xi\,\dfrac{ds}{\rho}, \\ d\cos\beta = \cos\upsilon\,\dfrac{ds}{\rho}, \\ d\cos\gamma = \cos\zeta\,\dfrac{ds}{\rho}. \end{cases}$$

II.

En vertu des équations (3), les équations

$$\cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\upsilon + \cos\gamma\cos\zeta = 0,$$
$$\cos\lambda\cos\xi + \cos\mu\cos\upsilon + \cos\nu\cos\zeta = 0,$$

deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\alpha\,d\cos\alpha + \cos\beta\,d\cos\beta + \cos\gamma\,d\cos\gamma = 0, \\ \cos\lambda\,d\cos\alpha + \cos\mu\,d\cos\beta + \cos\nu\,d\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs, en différentiant les suivantes :

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et ayant égard à la seconde des équations (5), il vient

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\alpha\,d\cos\lambda + \cos\beta\,d\cos\mu + \cos\gamma\,d\cos\nu = 0, \\ \cos\lambda\,d\cos\lambda + \cos\mu\,d\cos\mu + \cos\nu\,d\cos\nu = 0. \end{cases}$$

On voit que les équations (6) ne diffèrent des équations (5) qu'en ce que $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ y sont remplacées par $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$; d'où l'on conclut que les premières différentielles sont proportionnelles aux dernières : on a donc

$$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\rho}{r}.$$

Ces équations (7) démontrent le théorème suivant :

Si α et λ désignent les angles formés avec une droite fixe D *par la tangente et par l'axe du plan osculateur en un point* M *d'une courbe à double courbure, le rapport*

$$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha}$$

est le même, quelle que soit la droite D, *et sa valeur est égale au rapport de la première courbure à la seconde* [*].

Des équations (4) et (7) on déduit

$$8 \qquad \left\{\begin{aligned} d\cos\lambda &= \cos\xi\,\frac{ds}{r}, \\ d\cos\mu &= \cos\upsilon\,\frac{ds}{r}, \\ d\cos\nu &= \cos\zeta\,\frac{ds}{r}. \end{aligned}\right.$$

[*] M. Bertrand, à qui j'avais communiqué ce théorème, l'a proposé comme exercice aux élèves de l'École Normale. L'un d'eux, M. Guiraudet, lui a remis la démonstration géométrique suivante, qui est d'une extrême simplicité :

« La direction qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, est celle du rayon de courbure. Si l'on mène par l'origine deux parallèles aux axes des deux plans osculateurs infiniment voisins, et » que l'on prenne sur ces parallèles des longueurs OM, OM′ égales à l'unité, la ligne MM′ » qui joindra leurs extrémités fera avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$. Ainsi, pour prouver notre théorème, il » suffit de montrer le parallélisme de ces deux directions. Or cela est évident, car le » plan parallèle aux axes de deux plans osculateurs voisins est parallèle au plan normal de la courbe proposée, et la droite MM′ située dans ce plan est évidemment » perpendiculaire à l'axe du plan osculateur, et, par suite, parallèle au rayon de » courbure.

III.

De l'équation

$$\cos^2\xi + \cos^2\alpha + \cos^2\lambda = 1,$$

on tire, en différentiant,

$$d\cos\xi = -\cos\alpha\frac{d\cos\alpha}{\cos\xi} - \cos\lambda\frac{d\cos\lambda}{\cos\xi},$$

et, à cause des équations (4) et (8),

$$\begin{aligned} d\cos\xi &= -(\cos\alpha\, d\varepsilon + \cos\lambda\, d\eta) \\ &= -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{\rho}\right) ds; \end{aligned}$$

on a donc les trois nouvelles équations

$$(9)\quad \begin{cases} d\cos\xi = -\left(\dfrac{\cos\alpha}{\rho} + \dfrac{\cos\lambda}{r}\right) ds, \\ d\cos\nu = -\left(\dfrac{\cos\beta}{\rho} + \dfrac{\cos\mu}{r}\right) ds, \\ d\cos\zeta = -\left(\dfrac{\cos\gamma}{\rho} + \dfrac{\cos\nu}{r}\right) ds; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(10)\quad (d\cos\xi)^2 + (d\cos\nu)^2 + (d\cos\zeta)^2 = \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right) ds^2.$$

Divisant les équations (9) par ds, différentiant ensuite, et ayant égard aux équations (4) et (8), on obtient les suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} d\dfrac{d\cos\xi}{ds} = -\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right)\cos\xi\, ds - \left(\cos\alpha\, d\dfrac{1}{\rho} + \cos\lambda\, d\dfrac{1}{r}\right), \\ d\dfrac{d\cos\nu}{ds} = -\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right)\cos\nu\, ds - \left(\cos\beta\, d\dfrac{1}{\rho} + \cos\mu\, d\dfrac{1}{r}\right), \\ d\dfrac{d\cos\zeta}{ds} = -\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}\right)\cos\zeta\, ds - \left(\cos\gamma\, d\dfrac{1}{\rho} + \cos\nu\, d\dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

IV.

Des formules qui précèdent, découlent immédiatement deux théorèmes remarquables. Le premier de ces théorèmes, qu'on établit facilement par des considérations géométriques, a été démontré analytiquement par M. Puiseux (*voir* le tome VI de ce Journal). Il consiste en ce que *l'hélice ordinaire est la seule courbe dont les deux courbures sont constantes*. Le second théorème est dû à M. Bertrand, qui l'a démontré géométriquement; il consiste en ce que *les courbes dont les deux courbures ont un rapport constant sont des hélices tracées sur un cylindre à base quelconque*.

Le premier des deux théorèmes dont il vient d'être question résulte immédiatement des équations (11), qui, en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2},$$

et prenant ds pour la différentielle constante, donnent, si r et ρ sont constants,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 \cos\xi}{ds^2} &= -\frac{1}{m^2}\cos\xi, \\ \frac{d^2 \cos\upsilon}{ds^2} &= -\frac{1}{m^2}\cos\upsilon, \\ \frac{d^2 \cos\zeta}{ds^2} &= -\frac{1}{m^2}\cos\zeta. \end{aligned}\right.$$

En intégrant, on a

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\xi &= \cos a \cos\frac{s}{m} + \cos a' \sin\frac{s}{m}, \\ \cos\upsilon &= \cos b \cos\frac{s}{m} + \cos b' \sin\frac{s}{m}, \\ \cos\zeta &= \cos c \cos\frac{s}{m} + \cos c' \sin\frac{s}{m}; \end{aligned}\right.$$

en désignant par a, b, c; a', b', c' les angles formés avec les axes par deux droites arbitraires D et D′ perpendiculaires entre elles. Si x, y, z représentent les coordonnées de la courbe, on a

$$\cos\xi = \rho\frac{d\cos\alpha}{ds} = \rho\frac{d^2x}{ds^2};$$

les équations (13) donnent alors, en intégrant,

$$(14)\quad \begin{cases} \rho\dfrac{dx}{ds} = m\left(\cos a \sin\dfrac{s}{m} - \cos a' \cos\dfrac{s}{m}\right) + n\cos a'', \\ \rho\dfrac{dy}{ds} = m\left(\cos b \sin\dfrac{s}{m} - \cos b' \cos\dfrac{s}{m}\right) + n\cos b'', \\ \rho\dfrac{dz}{ds} = m\left(\cos c \sin\dfrac{s}{m} - \cos c' \cos\dfrac{s}{m}\right) + n\cos c'', \end{cases}$$

où n désigne le radical $\sqrt{\rho^2 - m^2}$, et a'', b'', c'' les angles formés avec les axes par une droite D″ perpendiculaire aux droites D et D′. Si l'on fait coïncider les droites rectangulaires D, D′, D″ avec les axes des x, des y et des z, les équations (14) se réduiront à

$$\rho\frac{dx}{ds} = m\sin\frac{s}{m},$$

$$\rho\frac{dy}{ds} = -m\cos\frac{s}{m},$$

$$\rho\frac{dz}{ds} = n;$$

d'où, en intégrant,

$$x - x_0 = -\frac{m}{\rho}\cos\frac{s}{m},$$

$$y - y_0 = -\frac{m}{\rho}\sin\frac{s}{m},$$

$$z - z_0 = \frac{n}{\rho}s,$$

ou, en transportant l'origine au point arbitraire (x_0, y_0, z_0) et éliminant s,

$$(15)\qquad x = -\frac{m}{\rho}\cos\frac{z}{mn},\quad y = -\frac{m}{\rho}\sin\frac{z}{mn}.$$

Ce sont les équations de l'hélice ordinaire.

V

Le second des deux théorèmes dont il a été question au paragraphe précédent, se démontre très-facilement en faisant usage des équations (7). Nous nous proposons de trouver les courbes dont les deux

courbures ont un rapport constant k. On a

$$(16) \qquad d\eta = k\,d\varepsilon,$$

et, par suite, en vertu des équations (7),

$$(17) \qquad \begin{cases} d\cos\lambda - k\,d\cos\alpha = 0, \\ d\cos\mu - k\,d\cos\beta = 0, \\ d\cos\nu - k\,d\cos\gamma = 0; \end{cases}$$

réciproquement, l'une des équations (17) entraîne l'équation (16). En intégrant, on a

$$\cos\lambda - k\cos\alpha = \text{constante},$$
$$\cos\mu - k\cos\beta = \text{constante},$$
$$\cos\nu - k\cos\gamma = \text{constante};$$

la somme des carrés des premiers membres ayant pour valeur $1 + k^2$, on aura

$$\cos\lambda - k\cos\alpha = \sqrt{1+k^2}\cos\alpha',$$
$$\cos\mu - k\cos\beta = \sqrt{1+k^2}\cos\beta',$$
$$\cos\nu - k\cos\gamma = \sqrt{1+k^2}\cos\gamma'$$

ou bien

$$(18) \qquad \begin{cases} \cos\lambda = k\cos\alpha + \sqrt{1+k^2}\cos\alpha', \\ \cos\mu = k\cos\beta + \sqrt{1+k^2}\cos\beta', \\ \cos\nu = k\cos\gamma + \sqrt{1+k^2}\cos\gamma'; \end{cases}$$

α', β', γ' étant les angles formés avec les axes par une droite arbitraire. Si l'on prend cette droite pour axe des z, les équations (18) deviennent

$$(19) \qquad \begin{cases} \cos\lambda = k\cos\alpha, \\ \cos\mu = k\cos\beta, \\ \cos\nu = k\cos\gamma + \sqrt{1+k^2}; \end{cases}$$

élevant au carré ces équations (19) et ajoutant les résultats, on a

$$\cos\gamma = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}, \tag{20}$$

d'où

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{21}$$

L'équation (20) montre que la tangente à la courbe considérée fait un angle constant avec l'axe des z; c'est donc une hélice tracée sur le cylindre qui la projette sur le plan des xy.

Il est facile de voir que, réciproquement pour toute hélice, c'est-à-dire pour toute courbe qui satisfait à l'équation (20), l'équation (16) a lieu. En effet, γ étant constant, les équations (3) montrent que $\cos\zeta$ est nul, donc la normale principale est constamment perpendiculaire à l'axe des z : alors l'équation (20) entraîne l'équation (21) à cause de

$$\cos^2\zeta + \cos^2\gamma + \cos^2\nu = 1.$$

D'après cela, on a

$$\cos^2\gamma + \cos^2\mu = \frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\xi = \frac{1}{1+k^2},$$

$$\cos\alpha\cos\gamma + \cos\xi\cos\mu = \frac{k}{1+k^2};$$

en ajoutant ces équations, après avoir multiplié la seconde par k^2 et la troisième par $-2k$, il vient

$$(\cos\gamma - k\cos\alpha)^2 + (\cos\mu - k\cos\xi)^2 = 0,$$

d'où l'on conclut les équations (19), et, par suite, les équations (17) et (16).

Il est facile d'établir maintenant que la projection sur le plan des xy de la courbe qu'on vient d'étudier, est un cercle si les deux rayons de courbure et de torsion sont eux-mêmes constants, ce qui donnera une nouvelle démonstration du théorème établi au § IV.

En effet, à cause des équations (19), les équations (9) donnent

$$d\cos\xi = -\left(\frac{1}{\rho} + \frac{k}{r}\right)\cos\alpha\, ds = -\frac{r^2+\rho^2}{\rho r^2}\, dx,$$

$$d\cos\upsilon = -\left(\frac{1}{\rho} + \frac{k}{r}\right)\cos\beta\, ds = -\frac{r^2+\rho^2}{\rho r^2}\, dy:$$

d'où, en intégrant et désignant par x_0, y_0 deux constantes,

$$x - x_0 = -\frac{\rho r^2}{r^2+\rho^2}\cos\xi,$$

$$y - y_0 = -\frac{\rho r^2}{r^2+\rho^2}\cos\upsilon.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient, à cause de $\cos\zeta = 0$,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{\rho r^2}{r^2+\rho^2}\right)^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

VI.

L'équation du plan normal en un point M (x, y, z) d'une courbe à double courbure, est

$$(22)\qquad (x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos\beta + (z_1 - z)\cos\gamma = 0.$$

Différentions cette équation par rapport à la variable indépendante dont x, y, z; α, β, γ, etc., sont fonctions, on aura

$$(x_1 - x)\, d\cos\alpha + (y_1 - y)\, d\cos\beta + (z_1 - z)\, d\cos\gamma = ds,$$

ou

$$(23)\qquad (x_1 - x)\cos\xi + (y_1 - y)\cos\upsilon + (z_1 - z)\cos\zeta = \rho.$$

Le système des équations (22) et (23) appartient à l'intersection du plan normal au point M et du plan normal *infiniment voisin*, ou, si l'on veut, à l'axe du cercle osculateur qu'on nomme aussi *droite polaire*. En différentiant de même l'équation (23), il vient

$$(x_1 - x)\, d\cos\xi + (y_1 - y)\, d\cos\upsilon + (z_1 - z)\, d\cos\zeta = d\rho,$$

car $dx\cos\xi + dy\cos\upsilon + dz\cos\zeta$ est nulle; en faisant usage des équations (9) et ayant égard à l'équation (22), la dernière équation

devient

$$(24)\quad (x_1 - x)\cos\lambda + (y_1 - y)\cos\mu + (z_1 - z)\cos\nu = -r\frac{d\rho}{ds}.$$

Le système des équations (22), (23), (24) représente l'intersection de trois plans normaux infiniment voisins, c'est-à-dire le centre de la sphère osculatrice au point M. Si l'on ajoute ces trois équations, après les avoir multipliées respectivement, d'abord par $\cos\alpha$, $\cos\xi$, $\cos\lambda$; puis par $\cos\beta$, $\cos\upsilon$, $\cos\mu$; puis enfin par $\cos\gamma$, $\cos\zeta$, $\cos\nu$, il vient

$$(25)\quad \begin{cases} x_1 - x = \rho\cos\xi - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\lambda, \\ y_1 - y = \rho\cos\upsilon - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\mu, \\ z_1 - z = \rho\cos\zeta - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\nu. \end{cases}$$

En élevant les équations (25) au carré, et désignant par R le rayon de la sphère osculatrice, on a

$$(26)\quad R^2 = \rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}.$$

De là résulte ce théorème :

Si une courbe est tracée sur une sphère, la quantité $\rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}$ est constante en chaque point et égale au carré du rayon de la sphère.

Réciproquement :

Si en chaque point d'une courbe la quantité $\rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}$ est constante, la courbe est sphérique, à moins que son rayon de courbure ρ ne soit constant.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de différentier les équations (25). On trouve ainsi, en se servant des formules données précédemment,

$$(27)\quad \begin{cases} dx_1 = -\left[\dfrac{\rho}{r}ds + d\left(r\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\lambda, \\ dy_1 = -\left[\dfrac{\rho}{r}ds + d\left(r\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\mu, \\ dz_1 = -\left[\dfrac{\rho}{r}ds + d\left(r\dfrac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\nu. \end{cases}$$

Ainsi la condition pour que le centre de la sphère osculatrice soit le même pour les différents points de la courbe est

$$\frac{\rho}{r}\,ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = 0:$$

elle n'est pas satisfaite si $\rho =$ une constante. Elle devient intégrable en la multipliant par $2r\frac{d\rho}{ds}$, et l'on trouve

$$\rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2} = \text{constante},$$

équation qui est satisfaite par $\rho =$ une constante. En excluant ce cas, on voit que si la précédente équation a lieu, les quantités x_1, y_1, z_1, R sont constantes pour tous les points de la courbe proposée; cette dernière est donc tout entière située sur une sphère fixe [*].

Les équations (27) peuvent servir à démontrer ce théorème connu, que *le lieu des centres des sphères osculatrices d'une courbe quel-*

---

[*] M. Bertrand m'a donné de ces résultats une démonstration géométrique fort simple fondée sur des considérations dont il a déjà plusieurs fois fait usage. Je crois devoir la transcrire ici :

« Nommons ρ le rayon de courbure d'une courbe, s' l'arc de la courbe lieu de ses » centres de courbure : le triangle infinitésimal formé par l'arc ds', la normale princi- » pale qui aboutit à l'une de ses extrémités, et la perpendiculaire abaissée sur cette nor- » male par l'autre extrémité de ds', montre que le cosinus de l'angle formé par l'arc s » avec le rayon ρ est égal à $\frac{d\rho}{ds'}$. Si l'on remarque que le rayon ρ est tangent à la surface » développable lieu des axes de cercles osculateurs sur laquelle est situé l'arc ds', et » qu'il coupe à angle droit la génératrice correspondante, on en conclut que $\frac{d\rho}{ds'}$ est » aussi le sinus de l'angle que ds' forme avec cette génératrice, et que, par suite, $d\rho$ est » la distance de l'une des extrémités de ds' à la génératrice qui passe par l'autre extré- » mité; mais l'angle de deux génératrices égal à l'angle de deux plans osculateurs de la » courbe proposée. En désignant par ds l'arc infiniment petit de cette courbe et par $\frac{1}{r}$,

conque est l'arête de rebroussement de la surface développable lieu des droites polaires ou axes des cercles osculateurs.

S'il s'agit d'une courbe dont le rayon de courbure ρ est constant, mais seulement dans ce cas, les équations (25) se réduisent à

$$x_1 - x = \rho \cos \xi,$$

$$y_1 - y = \rho \cos \upsilon,$$

$$z_1 - z = \rho \cos \zeta;$$

ce qui montre que le centre de la sphère osculatrice coïncide avec le centre de courbure; d'où l'on conclut ce théorème :

Si une courbe à double courbure a son rayon de courbure constant, le lieu des centres de courbure se confond avec l'arête de rebroussement de la surface enveloppe des plans normaux, et réciproquement.

---

sa seconde courbure, est mesuré par $\frac{ds}{r}$. Si donc on nomme u la distance de l'arc ds' à laquelle se coupent les deux axes consécutifs, on aura

$$d\rho = u\frac{ds}{r}, \quad u = r\frac{d\rho}{ds}.$$

Or, le rayon ρ, la distance u et le rayon R de la sphère osculatrice forment évidemment un triangle rectangle ; donc

$$R^2 = \rho^2 + r^2\frac{d\rho^2}{ds^2}.$$

Si l'on porte sur des normales à une courbe une longueur constante, la courbe lieu de leurs extrémités les coupe toutes à angle droit; si donc R est constant, l'arête de rebroussement de la surface développable doit, si elle *ne se réduit pas à un point*, couper à angle droit les normales de la courbe proposée qui passent par les différents points, ces normales sont donc perpendiculaires à l'axe des cercles osculateurs et sont, par conséquent, des normales principales; R se confond donc avec ρ, et l'on a

$$\rho = \text{constante}.$$

VII.

Considérons une courbe située sur une sphère de rayon a et dont le centre est à l'origine des coordonnées; on aura

$$\rho^2 + r^2 \frac{d\rho^2}{ds^2} = a^2, \tag{28}$$

et, comme les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont constamment nulles, les équations (25) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\rho\cos\xi + r\frac{d\rho}{ds}\cos\lambda, \\ y &= -\rho\cos\upsilon + r\frac{d\rho}{ds}\cos\mu, \\ z &= -\rho\cos\zeta + r\frac{d\rho}{ds}\cos\nu. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Il est facile de voir que les courbes sphériques de courbure constante sont des cercles. En effet, si ρ est constant, l'équation (28) montre que l'on a $r = \infty$ ou $\rho = a$. Dans le premier cas, il est évident que la courbe est une circonférence, puisqu'elle est plane. Dans le second cas, où $\rho = a$, les équations (29) donnent

$$x = -a\cos\xi, \quad y = -a\cos\upsilon, \quad z = -a\cos\zeta.$$

D'ailleurs, en prenant l'arc s de la courbe pour variable indépendante, $\cos\xi$, $\cos\upsilon$, $\cos\zeta$ sont proportionnels à d^2x, d^2y, d^2z; on a donc

$$y\,d^2z - z\,d^2y = 0, \quad z\,d^2x - x\,d^2z = 0, \quad x\,d^2y - y\,d^2x = 0.$$

Intégrant et désignant par A, B, C des constantes, il vient

$$y\,dz - z\,dy = \mathrm{A}\,ds, \quad z\,dx - x\,dz = \mathrm{B}\,ds, \quad x\,dy - y\,dx = \mathrm{C}\,ds;$$

enfin, en ajoutant ces équations respectivement multipliées par x, y, z, il vient

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0,$$

qui est l'équation du plan d'un grand cercle.

La recherche des courbes sphériques dont le rayon de torsion r est constant, présente de plus grandes difficultés. Je me bornerai à montrer que ce problème dépend de l'intégration d'une seule équation différentielle du deuxième ordre.

Si r est constant, l'équation (28) s'intègre, et donne

$$\rho = a \sin \frac{s - s_0}{r},$$

ou simplement,

$$\rho = a \sin \frac{s}{r},$$

puisque l'origine des arcs s est arbitraire. On déduit de là

$$r \frac{d\rho}{ds} = a \cos \frac{s}{r},$$

et les équations (29) donnent

$$(30) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos \dfrac{s}{r} \cos \lambda - r \sin \dfrac{s}{r} \dfrac{d \cos \lambda}{ds}, \\ \dfrac{y}{a} = \cos \dfrac{s}{r} \cos \mu - r \sin \dfrac{s}{r} \dfrac{d \cos \mu}{ds}, \\ \dfrac{z}{a} = \cos \dfrac{s}{r} \cos \nu - r \sin \dfrac{s}{r} \dfrac{d \cos \nu}{ds}. \end{cases}$$

Le problème est ainsi ramené à exprimer $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ en fonction de s, car les équations (30) permettront ensuite d'exprimer x, y, z en fonction de cette variable.

La première des équations (9), savoir,

$$d \cos \xi = - \left(\frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\cos \lambda}{r} \right) ds,$$

donne, à cause de

$$\cos \xi = r \frac{d \cos \lambda}{ds} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \xi},$$

et en prenant toujours s pour variable indépendante,

$$\frac{d^2 \cos \lambda}{ds^2} + \cos \lambda + \left(\sqrt{1 - \cos^2 \lambda - r^2 \left(\frac{d \cos \lambda}{ds} \right)^2} \right)' = 0.$$

ou, en remplaçant ρ par sa valeur $a \sin \frac{s}{r}$,

$$a \sin \frac{s}{r} \left(r^2 \frac{d^2 \cos \lambda}{ds^2} + \cos \lambda \right) + r \sqrt{1 - \cos^2 \lambda - r^2 \left(\frac{d \cos \lambda}{ds} \right)^2} = 0.$$

On peut prendre pour unité le rayon r de torsion, et l'on voit alors que l'équation différentielle du deuxième ordre

$$(31) \qquad a \sin s \left(\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \varphi \right) + \sqrt{1 - \varphi^2 - \frac{d \varphi}{ds}} = 0$$

est satisfaite par $\varphi = \cos \lambda$, $= \cos \mu$, $= \cos \nu$.

En combinant l'équation (31) avec celle qu'on en déduit par la différentiation, on obtient une équation linéaire du troisième ordre. Je suis parvenu depuis longtemps à intégrer cette équation; mais le résultat que j'ai obtenu est trop compliqué pour offrir quelque intérêt.

Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville);

PAR M. V. PUISEUX.

Dans une des Notes dont vous avez enrichi l'ouvrage de Monge, vous me faites l'honneur d'insérer la solution que j'ai donnée autrefois (*Journal de Mathématiques*, tome VII, page 65) de ce problème : *Trouver la ligne dont les deux courbures sont constantes*. J'avais prouvé que l'hélice tracée sur un cylindre de révolution est la seule courbe qui réponde à la question : vous faites observer que ce résultat est compris, comme cas particulier, dans un théorème qu'a donné depuis M. Bertrand, savoir, que l'hélice tracée sur un cylindre quelconque est la seule ligne pour laquelle le rapport des deux courbures soit constant. Vous ajoutez que ma méthode ne paraît pas se prêter à la démonstration de cette proposition; mais en cherchant à l'y appliquer, j'ai trouvé, pour établir le théorème de M. Bertrand, une analyse semblable à celle que j'avais employée dans le premier problème. Les trois coordonnées y sont traitées symétriquement, ce qui la distingue des formules, fort utiles d'ailleurs, dont M. Serret s'est servi pour traiter la même question. Voici cette démonstration :

Soient x, y, z les trois coordonnées rectangulaires d'un point d'une courbe, s l'arc qui aboutit à ce point et que je prends pour variable indépendante, ρ et r les deux rayons de courbure. Je fais, pour abréger,

$$d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = 2p,$$

d'où

$$d^2x\,d^3x + d^2y\,d^3y + d^2z\,d^3z = dp,$$

et aussi

$$d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y = l,$$
$$d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z = m,$$
$$d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x = n.$$

d'où

$$dl = d^2 y\, d^4 z - d^2 z\, d^4 y,$$
$$dm = d^2 z\, d^4 x - d^2 x\, d^4 z,$$
$$dn = d^2 x\, d^4 y - d^2 y\, d^4 x.$$

Soit, de plus,

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = q,$$

d'où l'on conclut

$$dq = dl\,dx + dm\,dy + dn\,dz,$$

en observant que la somme

$$l\,d^2 x + m\,d^2 y + n\,d^2 z$$

est identiquement nulle. On aura, en vertu des formules connues,

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{2p}}, \quad r = \frac{2p\,ds^2}{q},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\rho}{r} = \frac{q}{2p\sqrt{2p}}.$$

Cela posé, il s'agit de trouver la courbe pour laquelle le rapport $\frac{\rho}{r}$ est constant; on doit donc avoir

$$d \cdot \frac{q}{p\sqrt{p}} = 0,$$

ou bien

$$2p\,dq - 3q\,dp = 0.$$

Or, ds étant supposé constant, si l'on différentie trois fois de suite l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

on trouvera

$$dx\,d^2 x + dy\,d^2 y + dz\,d^2 z = 0,$$
$$dx\,d^3 x + dy\,d^3 y + dz\,d^3 z = -2p,$$
$$dx\,d^4 x + dy\,d^4 y + dz\,d^4 z = -3dp.$$

De ces trois équations on déduit, en éliminant alternativement deux

des trois différentielles dx, dy, dz,

$$\begin{aligned} D\,dx &= 2p\,dl - 3l\,dp, \\ D\,dy &= 2p\,dm - 3m\,dp, \\ D\,dz &= 2p\,dn - 3n\,dp, \end{aligned}$$

où D désigne le déterminant formé avec le système des neuf quantités

$$\begin{matrix} d^2x, & d^2y, & d^2z, \\ d^3x, & d^3y, & d^3z, \\ d^4x, & d^4y, & d^4z. \end{matrix}$$

J'ajoute ces trois formules après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz; il vient

$$\begin{aligned} D\,ds^2 &= 2p(dl\,dx + dm\,dy + dn\,dz) - 3\,dp(l\,dx + m\,dy + n\,dz) \\ &= 2p\,dq - 3q\,dp: \end{aligned}$$

on a donc, pour la ligne cherchée,

$$D = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$dl\,d^3x + dm\,d^3y + dn\,d^3z = 0;$$

comme d'ailleurs on a identiquement

$$dl\,d^2x + dm\,d^2y + dn\,d^2z = 0,$$

on conclut de ces deux équations,

$$\frac{dl}{d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y} = \frac{dm}{d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z} = \frac{dn}{d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x},$$

ou bien

$$\frac{dl}{l} = \frac{dm}{m} = \frac{dn}{n},$$

par où l'on voit que les quantités l, m, n ont entre elles des rapports constants. Soient donc

$$l = ah, \quad m = bh, \quad n = ch,$$

a, b, c désignant trois constantes : l'équation identique

$$l\,d^2x + m\,d^2y + n\,d^2z = 0$$

nous donnera

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = k\,ds.$$

k étant une nouvelle constante. Cette dernière équation signifie que les tangentes à la courbe cherchée font un angle constant avec une droite fixe L, savoir celle qui fait avec les axes coordonnés des angles ayant pour cosinus

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

cette courbe est donc bien une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite L.

On aurait abrégé la fin de la démonstration en s'appuyant sur un théorème connu, qu'on peut énoncer de cette manière :

Les lettres t, u, v,..., w désignant n variables, si le déterminant du système des n^2 quantités

$$\begin{array}{llll} t, & u, & v,\ldots, & w, \\ dt, & du, & dv,\ldots, & dw, \\ d^2t, & d^2u, & d^2v,\ldots, & d^2w, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d^{n-1}t, & d^{n-1}u, & d^{n-1}v,\ldots, & d^{n-1}w, \end{array}$$

est égal à zéro, on a nécessairement l'équation

$$at + bu + cv + \ldots + gw = 0,$$

où a, b, c,..., g sont des constantes.

En vertu de ce théorème, de l'équation

$$D = 0$$

trouvée plus haut, on conclut sur-le-champ

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0$$

MÉMOIRE

SUR LE DÉTERMINANT D'UN SYSTÈME DE FONCTIONS;

PAR M. J. BERTRAND.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 3 février 1851.)

Si l'on considère n fonctions de n variables indépendantes,

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \quad f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

elles ont, en tout, n^2 dérivées partielles, et l'on sait que le déterminant du système de ces n^2 dérivées a été nommé par M. Jacobi *déterminant du système des fonctions*. L'illustre géomètre a insisté, dans un de ses Mémoires, sur la grande analogie du déterminant d'un système de fonctions avec la dérivée d'une fonction d'une seule variable; mais cette analogie résulte jusqu'ici de la forme des énoncés et de la similitude des résultats bien plus que d'une ressemblance dans les définitions ou le mode de démonstration. J'adopte, dans ce Mémoire, une définition nouvelle qui rend, je crois, beaucoup plus sensible cette analogie importante, et de laquelle se déduisent, comme de simples corollaires, les propriétés connues du déterminant. Cette définition simplifie, en outre, notablement la démonstration des formules relatives aux changements de variables dans les intégrales multiples.

Définition du déterminant.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n fonctions de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; donnons à ces variables n systèmes d'accroissements distincts et indépendants :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{llll} d_1x_1, & d_1x_2, \ldots, & d_1x_n, \\ d_2x_1, & d_2x_2, \ldots, & d_2x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_nx_1, & d_nx_2, \ldots, & d_nx_n. \end{array} \right.$$

représentons les accroissements correspondants des fonctions par

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_n, \\ d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_n; \end{array}\right.$$

en sorte que, k et i désignant deux nombres entiers quelconques,

$$(3)\qquad d_k f_i = \frac{df_i}{dx_1} d_k x_1 + \frac{df_i}{dx_2} d_k x_2 + \ldots + \frac{df_i}{dx_n} d_k x_n.$$

Je nommerai *déterminant du système des fonctions*, la limite du rapport du déterminant du système (2) au déterminant du système (1), c'est-à-dire *la limite du rapport du déterminant du système d'accroissements des fonctions au déterminant du système des accroissements correspondants des variables.*

Pour que la définition précédente devienne légitime, il faut montrer que le rapport des déterminants des systèmes (1) et (2) est indépendant du système d'accroissements choisi pour les variables; or l'équation (3) prouve, en vertu d'un théorème bien connu dans la théorie des déterminants, que le déterminant du système (2) est le produit de deux déterminants, et que l'on a

$$\sum(\pm d_1 f_1 d_2 f_2 \ldots d_n f_n) = \sum(\pm d_1 x_1 d_2 x_2 \ldots d_n x_n) \sum\left(\pm \frac{df_1}{dx_1}\frac{df_2}{dx_2}\cdots\frac{df_n}{dx_n}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1 d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1 d_2 x_2 \ldots d_n x_n)} = \sum\left(\pm \frac{df_1}{dx_1}\frac{df_2}{dx_2}\cdots\frac{df_n}{dx_n}\right).$$

Or le second membre est indépendant de la valeur des accroissements attribués aux variables; il en est donc de même du premier, et la proposition est, par conséquent, démontrée.

Cas où le déterminant est nul.

Pour que le déterminant d'un système de fonctions soit nul, il faut et il suffit qu'il existe, entre ces fonctions, une relation indépendante des valeurs attribuées aux variables.

Prouvons d'abord que le déterminant ne peut pas être nul lorsque les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont indépendantes les unes des autres; dans ce cas, en effet, les équations

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1,$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_n,$$

sont distinctes les unes des autres, et l'on peut concevoir que l'on en déduise $x_1, x_2, \ldots, x_n$ exprimées en fonctions de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. On peut, par suite, considérer $f_1, f_2, \ldots, f_n$ comme des variables indépendantes et disposer arbitrairement de leurs accroissements, en sorte que le déterminant du système de ces accroissements qui sert de numérateur au déterminant du système des fonctions, peut être considéré comme complétement arbitraire. Ce numérateur peut donc avoir une valeur différente de zéro, et, par suite, le quotient n'est pas nul.

On doit remarquer, pour compléter cette démonstration, que le dénominateur du déterminant du système des fonctions ne peut pas, si ce n'est pour des valeurs particulières des variables, être infini par rapport au numérateur, car l'un et l'autre contiennent à leurs différents termes le même nombre de facteurs infiniment petits du premier ordre.

Réciproquement, il est facile de voir que, dans le cas où les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ne sont pas indépendantes, leur déterminant est toujours nul. Supposons, en effet, que, parmi ces fonctions, un certain nombre d'entre elles, $f_1, f_2, \ldots, f_p$, puissent seules recevoir des valeurs arbitraires, et que les autres, $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n$, en soient des fonctions déterminées; $f_1, f_2, \ldots, f_p$ étant arbitraires, on pourra sup-

poser que leurs accroissements soient nuls, en sorte que

$$d_1 f_1 = 0, \quad d_1 f_2 = 0, \quad d_1 f_p = 0,$$

et cela d'une infinité de manières, car ces équations n'établissent que p relations entre les accroissements $d_1 x_1$, $d_1 x_2, \ldots, d_1 x_n$, qui, par suite, resteront, en partie, indéterminés.

Mais alors $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n$, qui sont, par hypothèse, des fonctions de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, auront aussi des accroissements égaux à zéro, et, par suite, dans le carré relatif au déterminant des accroissements des fonctions, la première ligne horizontale tout entière,

$$d_1 f_1, \quad d_1 f_2, \quad d_1 f_3, \ldots, \quad d_1 f_n,$$

sera composée de zéros, et le déterminant sera évidemment égal à zéro. Or on voit, sans qu'il soit nécessaire de le développer, que le déterminant de l'accroissement des variables pourra être rendu différent de zéro; car la première ligne horizontale de ce déterminant n'est pas uniquement composée de zéros, et les $n-1$ lignes restantes peuvent être choisies complétement à volonté. Le rapport de ces deux déterminants, c'est-à-dire le déterminant du système proposé, est donc, comme nous l'avions annoncé, égal à zéro.

Déterminant des fonctions inverses.

Si l'on conçoit que les équations

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f_n, \end{aligned}$$

soient résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et que l'on trouve

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(f_1, f_2, \ldots, f_n), \\ x_2 &= \varphi_2(f_1, f_2, \ldots, f_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varphi_n(f_1, f_2, \ldots, f_n), \end{aligned}$$

on dit que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ forment un système inverse de celui des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$; il est facile de voir que les systèmes (1)

et (2) ont des déterminants dont les valeurs sont réciproques. Si l'on considère, en effet, n systèmes d'accroissements attribués à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les accroissements correspondants de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, le déterminant du système (1) est

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1 d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1 d_2 x_2 \ldots d_n x_n)},$$

et celui du système (2),

$$\frac{\sum(\pm d_1 x_1 d_2 x_2 \ldots d_n x_n)}{\sum(\pm d_1 f_1 d_2 f_2 \ldots d_n f_n)},$$

et ces fractions sont évidemment réciproques l'une de l'autre.

Déterminant des fonctions de fonctions.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, n fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considérons n fonctions de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, que nous désignerons par $f_1, f_2, \ldots, f_n$; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ formeront un système de fonctions de fonctions. Pour chercher l'expression du déterminant d'un pareil système, attribuons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n systèmes d'accroissements

$$\begin{array}{lll} d_1 x_1, & d_1 x_2, \ldots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, \ldots, & d_2 x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n x_1, & d_n x_2, \ldots, & d_n x_n, \end{array}$$

il en résultera pour les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, des accroissements correspondants

$$\begin{array}{lll} d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_n, \\ d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_n, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} d_1 \varphi_1, & d_1 \varphi_2, \ldots, & d_1 \varphi_n, \\ d_2 \varphi_1, & d_2 \varphi_2, \ldots, & d_2 \varphi_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n \varphi_1, & d_n \varphi_2, \ldots, & d_n \varphi_n. \end{array}$$

Or on a identiquement

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)} = \frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum(\pm d_1 \varphi_1\, d_2 \varphi_2 \ldots d_n \varphi_n)} \cdot \frac{\sum(\pm d_1 \varphi_1\, d_2 \varphi_2 \ldots d_n \varphi_n)}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)},$$

et cette identité est l'expression analytique du théorème suivant :

Le déterminant d'un système de fonctions de fonctions est le produit du déterminant du système des fonctions proposées par rapport aux variables dont elles dépendent directement, par le déterminant de ce système de variables intermédiaires considérées comme fonctions des variables principales.

Déterminant des fonctions composées.

Supposons actuellement que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient exprimées au moyen des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dont le nombre p soit différent de n. Cherchons le déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ dépendent par hypothèse. Si nous attribuons à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n systèmes d'accroissements infiniment petits

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} d_1 x_1, & d_1 x_2, \ldots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, \ldots, & d_2 x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n x_1, & d_n x_2, \ldots, & d_n x_n, \end{array}\right.$$

en désignant les accroissements correspondants des fonctions par

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_n. \\ d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_n. \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_n. \end{array}\right.$$

le déterminant cherché est, par définition, le rapport des déterminants des systèmes (2) et (1), c'est-à-dire

$$\frac{\sum(\pm d_1 f_1\, d_2 f_2 \ldots d_n) f_n}{\sum(\pm d_1 x_1\, d_2 x_2 \ldots d_n x_n)}.$$

Or, en remarquant que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont fonctions de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, on a, pour expression du terme général du système (2),

$$d_k f_i = \frac{df_i}{d\varphi_1} d_k \varphi_1 + \frac{df_i}{d\varphi_2} d_k \varphi_2 + \ldots + \frac{df_i}{d\varphi_p} d_k \varphi_p,$$

d'où l'on conclut, en vertu d'une propriété bien connue des déterminants,

$$\sum (\pm d_1 f_1 d_2 f_2 \ldots d_n f_n)$$
$$= \mathcal{S} \sum \left(\pm \frac{df_1}{d\varphi_{\alpha_1}} \frac{df_2}{d\varphi_{\alpha_2}} \cdots \frac{df_n}{d\varphi_{\alpha_n}} \right) \sum \pm d_1 \varphi_{\alpha_1} d_2 \varphi_{\alpha_2} \ldots d_n \varphi_{\alpha_n}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant n indices quelconques, tous différents, pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, p$, et le signe $\mathcal{S}$ indiquant que l'on doit faire la somme des résultats correspondants aux divers groupes d'indices; la somme $\mathcal{S}$ se réduisant évidemment à zéro si p est moindre que n.

On déduit de la formule précédente

$$\frac{\sum \pm d_1 f_1 d_2 f_2 \ldots d_n f_n}{\sum \pm d_1 \varphi_1 d_2 \varphi_2 \ldots d_p \varphi_p}$$
$$= \mathcal{S} \sum \left(\pm \frac{df_1}{d\varphi_{\alpha_1}} \frac{df_2}{d\varphi_{\alpha_2}} \cdots \frac{df_n}{d\varphi_{\alpha_n}} \right) \frac{\sum \pm d_1 \varphi_{\alpha_1} d_2 \varphi_{\alpha_2} \ldots d_n \varphi_{\alpha_n}}{\sum \pm d_1 \varphi_1 d_2 \varphi_2 \ldots d_p \varphi_p}$$

et si l'on remarque que $\sum \left(\pm \frac{df_1}{d\varphi_{\alpha_1}} \frac{df_2}{d\varphi_{\alpha_2}} \cdots \frac{df_n}{d\varphi_{\alpha_n}} \right)$ est le déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$ lorsque l'on considère ces fonctions comme ne contenant que les variables indépendantes $\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \ldots, \varphi_{\alpha_n}$, on voit, en vertu du théorème relatif au déterminant des fonctions de fonctions, que le second membre exprime la somme des valeurs du déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$, en y considérant successivement comme seules variables les fonctions dont les indices forment les groupes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Déterminant des fonctions implicites.

Considérons n équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_n = 0$$

entre n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que l'on attribue aux variables, n systèmes d'accroissements,

$$\begin{array}{llll} d_1 x_1, & d_1 x_2, & \ldots & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, & \ldots & d_2 x_n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_n x_1, & d_n x_2, \ldots, & & d_n x_n; \end{array}$$

soient

$$\begin{array}{llll} d_1 f_1, & d_1 f_2, & \ldots & d_1 f_n, \\ d_2 f_1, & d_2 f_2, & \ldots & d_2 f_n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & & d_n f_n, \end{array}$$

les accroissements correspondants de $f_1, f_2, \ldots, f_n$; les fonctions F_1, $F_2, \ldots, F_n$ devant rester constamment nulles, on peut égaler leurs accroissements à zéro. On en conclut

$$\frac{dF_1}{dx_1} d_1 x_1 + \frac{dF_1}{dx_2} d_1 x_2 + \ldots + \frac{dF_1}{dx_n} d_1 x_n$$
$$= - \left(\frac{dF_1}{df_1} d_1 f_1 + \frac{dF_1}{df_2} d_1 f_2 + \ldots + \frac{dF_1}{df_n} d_1 f_n \right).$$

équation que nous écrirons plus simplement

$$(1) \qquad d_{1,x} F_1 = - d_{1,f} F_1.$$

Cela posé, le déterminant du système $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est, par définition,

$$\frac{\sum (\pm d_1 f_1 d_2 f_2 \ldots d_n f_n)}{\sum \pm d_1 x_1 d_2 x_2 \ldots d_n x_n}.$$

et il peut évidemment s'écrire

$$(2)\qquad (-1)^n \frac{\sum(\pm d_{1x}F_1\, d_{2x}F_2 \ldots d_{nx}F_n)}{\sum(\pm d_1x_1\, d_2x_2 \ldots d_nx_n)} : \frac{\sum(\pm d_{1f}F_1\, d_{2f}F_2 \ldots d_{nf}F_n)}{\sum(\pm d_1f_1\, d_2f_2 \ldots d_nf_n)}.$$

car, par cette transformation, nous introduisons, en numérateur et en dénominateur, deux expressions

$$(-1)^n \sum \pm d_{1x}F_1\, d_{2x}F_2 \ldots d_{nx}F_n \quad \text{et} \quad \sum \pm d_{1f}F_1\, d_{2f}F_2 \ldots d_{nf}F_n,$$

qui, en vertu de l'équation (1), sont identiquement les mêmes.

En se rappelant la formule trouvée pour le déterminant d'un système de fonctions de fonctions, on verra que l'équation (2) est l'expression du théorème suivant :

Le déterminant d'un système de fonctions implicites $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fournis par n équations, s'obtient en multipliant par $(-1)^n$ le quotient de la division du déterminant des premiers membres de ces équations considérés comme ne renfermant que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par le déterminant des mêmes premiers membres considérés comme ne renfermant que les variables $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Diverses formes que l'on peut donner à un déterminant.

En faisant varier les systèmes d'accroissements attribués aux variables, on peut mettre l'expression du déterminant d'un système de fonctions sous un grand nombre de formes distinctes.

1°. Supposons que, dans chaque système, toutes les variables, excepté une, aient des accroissements égaux à zéro, en sorte que ces divers accroissements soient représentés par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
d_1x_1, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, \\
0, & d_2x_2, & 0, & 0, \ldots, & 0, \\
0, & 0, & d_3x_3, & 0, \ldots, & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, & 0, & 0, & 0, \ldots, & d_nx_n;
\end{array}$$

les accroissements correspondants des fonctions sont évidemment

$$\begin{array}{llll}
\frac{df_1}{dx_1} d_1 x_1, & \frac{df_2}{dx_1} d_1 x_1, \ldots, & \frac{df_n}{dx_1} d_1 x_1, \\
\frac{df_1}{dx_2} d_2 x_2, & \frac{df_2}{dx_2} d_2 x_2, \ldots, & \frac{df_n}{dx_2} d_2 x_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{df_1}{dx_n} d_n x_n, & \frac{df_2}{dx_n} d_n x_n, \ldots, & \frac{df_n}{dx_n} d_n x_n;
\end{array}$$

le rapport des deux déterminants est évidemment

$$\Sigma \pm \frac{df_1}{dx_1} \frac{df_2}{dx_2} \cdots \frac{df_n}{dx_n}.$$

C'est l'expression donnée comme définition par M. Jacobi.

2°. Parmi les $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1, f_2, \ldots, f_n$, on peut en choisir n à volonté; les autres sont alors déterminées. Il en résulte évidemment que, si l'on suppose que $n-1$ d'entre elles restent invariables, toutes les autres devront changer à la fois, et les rapports de leurs accroissements seront déterminés. D'après cette remarque, les accroissements des variables et les accroissements correspondants des fonctions peuvent être représentés par le tableau suivant :

$$\begin{array}{lllllllll}
d_1 x_1, & d_1 x_2, & & d_1 x_n, & d_1 f_1, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0. \\
0, & d_2 x_2, & & d_2 x_n, & d_2 f_1, & d_2 f_2, & 0, & 0, \ldots, & 0. \\
0, & 0, & d_3 x_3, \ldots, & d_3 x_n, & d_3 f_1, & d_3 f_2, & d_3 f_3, & 0, \ldots, & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, & 0, & 0, \ldots, & d_n x_n, & d_n f_1, & d_n f_2, & & & d_n f_n.
\end{array}$$

Or le rapport des déterminants de ces deux systemes est évidemment

$$\frac{d_1 f_1 \, d_2 f_2 \ldots d_n f_n}{d_1 x_1 \, d_2 x_2 \ldots d_n x_n},$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}\right) \left(\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}\right) \cdots \left(\frac{d_n f_n}{d_n x_n}\right).$$

$d_1 f_1$ est l'accroissement de f_1 lorsque $f_2, f_3, \ldots, f_n$ subissent des accrois-

sements nuls, et $\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}$ est, par conséquent, la dérivée partielle par rapport à x_1 de f_1 considéré comme fonction de $x_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$. $d_2 f_2$ est l'accroissement de f_2 lorsque $x_1, f_3, f_4, \ldots, f_n$ reçoivent des accroissements, $\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}$ est, par conséquent, la dérivée partielle par rapport à x_2 de f_2 considéré comme fonction de $x_1, x_2, f_3, \ldots, f_n$, et ainsi de suite. Cette expression du déterminant sous forme de produit a été donnée par M. Jacobi. Elle est d'un emploi fort commode.

3°. En remarquant, comme précédemment, que l'on peut supposer nuls $n-1$ des accroissements $d_i x_1, d_i x_2, \ldots, d_i x_n$; $d_i f_1, d_i f_2, \ldots, d_i f_n$, on verra que les accroissements des variables et ceux des fonctions peuvent être représentés par le tableau suivant, dans lequel m désigne un nombre entier quelconque :

$$\begin{array}{llllllllll}
\ldots & 0, & d_1 x_{m+1}, & d_1 x_{m+2}, \ldots, & d_1 x_n, & d_1 f_1, & d_1 f_2, \ldots, & d_1 f_m, & 0, \ldots, & 0, \\
\ldots & 0, & d_2 x_{m+1}, & d_2 x_{m+2}, \ldots, & d_2 x_n, & d_2 f_1, & d_2 f_2, \ldots, & d_2 f_m, & 0, \ldots, & 0, \\
\ldots & 0, & d_3 x_{m+1}, & d_3 x_{m+2}, \ldots, & d_3 x_n, & d_3 f_1, & d_3 f_2, \ldots, & d_3 f_m, & 0, \ldots, & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & d_m x_{m+1}, & d_m x_{m+2}, & \ldots, & d_m x_n, & d_m f_1, & d_m f_2, \ldots, & d_m f_m, & 0, \ldots, & 0, \\
\ldots & 0, & d_{m+1} x_{m+1}, & 0, \ldots, & 0, & d_{m+1} f_1, & d_{m+1} f_2, \ldots, & d_{m+1} f_m, & d_{m+1} f_{m+1}, \ldots, & d_{m+1} f_n, \\
0, \; 0, \; 0, \ldots, & 0, & 0, & d_{m+2} x_{m+2}, \ldots, & 0, & d_{m+2} f_1, & d_{m+2} f_2, \ldots, & d_{m+2} f_m, & d_{m+2} f_{m+1}, \ldots, & d_{m+2} f_n, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & 0, & 0, & 0, \ldots, & d_n x_n, & d_n f_1, & d_n f_2, \ldots, & d_n f_m, & d_n f_{m+1}, \ldots, & d_n f_n.
\end{array}$$

Le déterminant du système d'accroissements des variables est alors $d_1 x_1 \; d_2 x_2 \ldots d_n x_n$, celui du système d'accroissements des fonctions est le produit de deux déterminants

$$\sum \pm d_1 f_1 \, d_2 f_2 \ldots d_m f_m \sum \pm d_{m+1} f_{m+1}, \, d_{m+2} f_{m+2} \ldots d_n f_n.$$

et le rapport de ces deux déterminants peut s'écrire

$$\sum \pm \left| \begin{array}{ccc} \frac{d f_1}{d x_1}, & \frac{d f_1}{d x_2}, & \ldots \frac{d f_1}{d x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d f_m}{d x_1}, & \frac{d f_m}{d x_2}, & \ldots \frac{d f_m}{d x_m} \end{array} \right| \sum \left| \begin{array}{ccc} \frac{d f_{m+1}}{d x_{m+1}}, & \frac{d f_{m+1}}{d x_{m+2}}, & \ldots \frac{d f_{m+1}}{d x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d f_n}{d x_{m+1}}, & \frac{d f_n}{d x_{m+2}}, & \ldots \frac{d f_n}{d x_n} \end{array} \right|$$

En consultant le tableau des accroissements des variables, on verra

facilement que les dérivées $\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, \ldots, \frac{df_n}{dx_n}$, qui figurent dans le premier facteur de ce produit, sont prises en considérant $f_1, f_2, \ldots, f_m$ comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n$, et que, dans le second facteur, les dérivées $\frac{df_{m+1}}{dx_{m+1}}, \frac{df_{m+2}}{dx_{m+2}}$, etc., sont prises, en regardant $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots$, comme des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si, dans la formule générale, on suppose $m = 1$, on obtient, pour le déterminant, la forme suivante, qui est fréquemment employée,

$$\frac{df}{dx_1} \sum \left(\pm \frac{df}{dx} \frac{df_2}{dx} \cdots \frac{df_n}{dx_n} \right).$$

$\frac{df_1}{dx}$ étant la dérivée partielle de f_1 considérée comme fonction de x_1, $f_2, \ldots, f_n$.

Transformation qui n'altère pas le déterminant.

Considérons un système de n fonctions

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_n. \end{cases}$$

Si l'on se sert de ces diverses équations pour transformer une ou plusieurs des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ en les exprimant en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et que l'on obtienne ainsi

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_n. \end{cases}$$

M. Jacobi avait admis, dans son Mémoire sur les déterminants, que le déterminant des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est le même que celui de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, lors même qu'on y considère $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ comme des constantes. Il a remarqué depuis que cet énoncé n'est pas exact, en général, mais sans indiquer la relation qui existe entre les déterminants dans le cas où ils ne sont pas égaux entre eux. La recherche de

cette relation est, d'ailleurs, extrêmement facile. Le système des équations (2) peut, en effet, être considéré comme fournissant les expressions de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en fonction implicite de $x_1, x_2, \ldots, x_n$: on peut donc, pour calculer le déterminant de ce système de fonctions, faire usage de la formule donnée plus haut pour exprimer le déterminant d'un système de fonctions implicites; on aura

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left(\pm \frac{d\lambda_1}{dx_1}\frac{d\lambda_2}{dx_2}\cdots\frac{d\lambda_n}{dx_n}\right) \\ &\sum\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)\left(\frac{d\varphi_2}{dx_2}\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right) \\ &= (-1)^n \frac{\sum\left[\pm\left(\frac{d\varphi_1}{d\lambda_1}-1\right)\left(\frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}-1\right)\cdots\left(\frac{d\varphi_n}{d\lambda_n}-1\right)\right]}{} \end{aligned} \right.$$

le dénominateur du second membre exprimant le déterminant du système

$$(4)\quad \left| \begin{matrix} \frac{d\varphi_1}{d\lambda_1}-1, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_2}, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_3}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_n}, \\ \frac{d\varphi_2}{d\lambda_1}, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_2}-1, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_3}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_n}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{d\lambda_1}, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_2}, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_3}, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_n}-1 \end{matrix} \right.$$

Or ce déterminant est, en général, très-différent de $(-1)^n$, et, par suite, les systèmes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n'ont pas le même déterminant. Il existe cependant un cas très-général dans lequel le déterminant du système (4) est $(-1)^n$, c'est celui où φ_1 ne contient pas λ_1, φ_2 ne contient ni λ_1 ni λ_2, φ_3 ni λ_1, ni λ_2, ni λ_3, etc.: dans ce cas, en effet, le système (4) se réduit à

$$\begin{matrix} -1, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_2}, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_3}, \ldots, & \frac{d\varphi_1}{d\lambda_n}, \\ 0, & -1, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_3}, \ldots, & \frac{d\varphi_2}{d\lambda_n}, \\ 0, & 0, & -1, \ldots, & \frac{d\varphi_3}{d\lambda_n}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & \frac{d\varphi_n}{d\lambda_n}, \end{matrix}$$

qui a évidemment pour déterminant $(-1)^n$. L'équation (3) devient alors

$$\sum\left(\pm\frac{d\lambda_1}{dx_1}\frac{d\lambda_2}{dx_2}\cdots\frac{d\lambda_n}{dx_n}\right)=\sum\left(\pm\frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2}\cdots\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right).$$

Changement de variables dans les intégrales multiples.

Considérons d'abord une intégrale double

$$\int\int V\,dx\,dy,$$

V désignant une fonction quelconque des deux variables x et y. On peut considérer cette intégrale comme la somme des produits obtenus en multipliant par V chaque élément infiniment petit de la surface plane dans l'intérieur de laquelle se fait l'intégration. Peu importe évidemment la forme de ces éléments. Nous pouvons donc supposer que ce soient des triangles. Soient

$$x,\quad y,\quad x+d_1x,\quad y+d_1y,\quad x+d_2x,\quad y+d_2y$$

les coordonnées des trois sommets de l'un d'eux; sa surface sera, comme on sait, la moitié du déterminant du système

$$\begin{matrix} d_1x, & d_1y, \\ d_2x, & d_2y. \end{matrix}$$

et l'on peut considérer, par conséquent, l'intégrale comme la somme

$$\int\frac{V}{2}\,\text{dét.}\begin{cases} d_1x, & d_1y, \\ d_2x, & d_2y. \end{cases}$$

Mais si u et v désignent deux fonctions de x et y et Δ leur déterminant, on a, d'après ce qui précède,

$$\Delta=\frac{\text{dét.}\begin{cases} d_1u, & d_1v \\ d_2u, & d_2v \end{cases}}{\text{dét.}\begin{cases} d_1x, & d_1y \\ d_2x, & d_2y \end{cases}}.$$

en sorte que l'intégrale précédente est identiquement égale à

$$\int \frac{V}{2\Delta} \text{dét.} \begin{cases} d_1 u, & d_1 v, \\ d_2 u, & d_2 v, \end{cases}$$

c'est-à-dire évidemment à l'intégrale double

$$\int\int \frac{V}{\Delta}\, du\, dv$$

étendue à toutes les valeurs de u et de v qui correspondent à celles de x et de y comprises dans les limites de l'intégration proposée.

Considérons maintenant l'intégrale triple

$$\int\int\int V\, dx\, dy\, dz,$$

V désignant une fonction quelconque de x, y, z. On peut considérer cette intégrale comme la somme des produits obtenus en multipliant chaque élément infiniment petit du volume dans l'intérieur duquel se fait l'intégration par la valeur correspondante de la fonction V. Peu importe évidemment la forme de ce volume élémentaire, et nous pouvons, par conséquent, supposer que ce soit une pyramide. En désignant par

$$\begin{array}{llllll} x, & y, & z, & x + d_1 x, & y + d_1 y, & z + d_1 z, \\ x + d_2 x, & y + d_2 y, & z + d_2 z, & x + d_3 x, & y + d_3 y, & z + d_3 z \end{array}$$

les coordonnées des sommets de cette pyramide, son volume est, comme on s'en assure facilement,

$$\frac{1}{6} \text{dét.} \begin{cases} d_1 x, & d_1 y, & d_1 z, \\ d_2 x, & d_2 y, & d_2 z, \\ d_3 x, & d_3 y, & d_3 z, \end{cases}$$

et l'intégrale triple est, par suite, égale à

$$\int \frac{V}{6} \text{dét.} \begin{cases} d_1 x, & d_1 y, & d_1 z, \\ d_2 x, & d_2 y, & d_2 z, \\ d_3 x, & d_3 y, & d_3 z, \end{cases}$$

la somme s'étendant à toutes les pyramides élémentaires.

Or, en désignant par u, v, w trois fonctions de x, y, z, et par Δ leur déterminant, Δ est égal à

$$\frac{\text{dét.}\begin{cases} d_1 u, & d_1 v, & d_1 w \\ d_2 u, & d_2 v, & d_2 w \\ d_3 u, & d_3 v, & d_3 w \end{cases}}{\text{dét.}\begin{cases} d_1 x, & d_1 y, & d_1 z \\ d_2 x, & d_2 y, & d_2 z \\ d_3 x, & d_3 y, & d_3 z \end{cases}},$$

d'où il résulte que l'intégrale proposée peut s'écrire

$$\int \frac{V}{6\Delta} \text{dét.}\begin{cases} d_1 u, & d_1 v, & d_1 w, \\ d_2 u, & d_2 v, & d_2 w, \\ d_3 u, & d_3 v, & d_3 w, \end{cases}$$

ce qui représente évidemment l'intégrale triple

$$\int\int\int \frac{V}{\Delta}\, du\, dv\, dw.$$

Le même procédé de démonstration pourrait s'étendre au cas d'un plus grand nombre de variables; mais il faudrait pour cela recourir à une sorte de géométrie idéale qui n'a pas un rapport direct avec la théorie des déterminants.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES,

Par M. V. PUISEUX,

Maître de Conférences à l'École Normale.

I.

L'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, dans laquelle u_1 désigne une fonction de z assujettie à varier avec z par degrés insensibles et à satisfaire à l'équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

a, en général, une infinité de valeurs. Ces valeurs répondent, comme l'a montré M. Cauchy, aux divers chemins par lesquels le point mobile Z correspondant à la variable imaginaire z peut aller du point C correspondant à $z = c$ au point K correpondant à $z = k$.

Dans un précédent travail [*], en suivant la marche indiquée par M. Cauchy, j'ai fait voir que d'une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ on peut déduire une infinité d'autres valeurs de la même intégrale, en ajoutant à la première des multiples entiers quelconques de certaines constantes : chacune de ces constantes, auxquelles j'ai donné le nom de *périodes*, est de la forme

$$p = \int u_n\,dz,$$

[*] *Voir* dans le Journal de M. Liouville, tome XV, le Mémoire intitulé : *Recherches sur les fonctions algébriques.*

u_n désignant une des fonctions déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé tel, qu'après une révolution du point Z sur ce contour la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Mais il n'est pas évident que toute quantité p, définie comme je viens de le faire, soit, en effet, une période de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, ni que cette période appartienne à toutes les valeurs de l'intégrale. Je me propose de prouver qu'il en est ainsi, lorsque l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est irréductible [*], de sorte que si, à une valeur quelconque de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, on ajoute un multiple entier d'une quelconque des quantités de la forme p, on ne cessera pas d'avoir une valeur de la même intégrale : ainsi se trouvera résolue généralement la seconde des questions que je m'étais posées au n° **48** du Mémoire cité.

Pour établir le théorème dont il s'agit, je vais d'abord prouver la proposition suivante :

Si une fonction algébrique de z, assujettie à varier avec z par degrés insensibles, n'a qu'une valeur, c'est-à-dire si elle reprend toujours la même valeur, lorsque le point mobile Z *revient à la même position, cette fonction est nécessairement rationnelle.*

En effet, appelons v cette fonction et soit

$$\mathrm{N}v^m + \mathrm{P}v^{m-1} + \mathrm{Q}v^{m-2} + \ldots + \mathrm{S}v + \mathrm{T} = 0$$

l'équation à laquelle elle satisfait, N, P,..., T désignant des polynômes entiers en z. Si l'on pose

$$\mathrm{N}v = u,$$

[*] J'entends que cette équation est irréductible, lorsque le premier membre n'est divisible par aucun polynôme entier en u et z : il est permis d'ailleurs de supposer que ce premier membre n'a pas de facteur entier fonction de z seulement.

la fonction u n'aura, comme v, qu'une seule valeur pour chaque valeur de z et satisfera à l'équation

$$(1) \qquad u^m + \mathrm{P}u^{m-1} + \mathrm{NQ}u^{m-2} + \ldots + \mathrm{N}^{m-2}\mathrm{S}u + \mathrm{N}^{m-1}\mathrm{T} = 0 :$$

de plus, elle ne deviendra infinie pour aucune valeur finie de z.

Maintenant on voit sans peine que l'intégrale $\int_c^k u\,dz$ conservera la même valeur, si, les limites c et k restant les mêmes, on déforme le chemin CMK par lequel le point mobile va de C en K. C'est ce qui se trouve établi dans le Mémoire cité (n° **9**), en supposant que le chemin CMK ne franchisse en se déformant aucun des points A, A′, etc., pour lesquels la fonction u devient égale à une autre racine de l'équation (1) : mais ici l'intégrale dont il s'agit ne changera pas non plus, lors même que le chemin CMK franchirait un des points A, A′, etc., le point A par exemple. En effet, décrivons autour de ce point un contour fermé infiniment petit DEFG et joignons respectivement les

points C et K à deux points D et F de ce contour ; je dis que la valeur de l'intégrale $\int_c^k u\,dz$ prise le long du chemin CDEFK est égale à la valeur de la même intégrale prise le long du chemin CDGFK. En effet, chacune de ces valeurs, et, par conséquent, leur différence, si elles en ont une, est indépendante des dimensions du contour DEFG. D'un autre côté, la fonction u n'ayant qu'une valeur en chaque point des lignes CD, FK, la différence dont je viens de parler se réduit à la valeur ε de l'intégrale $\int u\,dz$ prise le long du contour DEFG. Or la fonction conserve une valeur finie pour toute valeur finie de z : ainsi on est assuré, en resserrant suffisamment le contour DEFG, de rendre le module de ε moindre que toute quantité donnée.

et comme ε ne dépend pas des dimensions de ce contour, il faut bien qu'on ait

$$\varepsilon = 0;$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Concevons à présent que, les points C et K coïncidant, le chemin CMK devienne un contour fermé; l'intégrale $\int u\,dz$ prise le long de ce contour sera indépendante du point C qu'on y prendra pour point de départ de Z (n° **12**) [*]. De plus, il suit de ce qu'on vient de dire, qu'elle gardera la même valeur lorsque ce contour se déformera d'une manière quelconque : elle est donc toujours nulle, puisqu'on peut faire décroître jusqu'à zéro les dimensions du contour.

Posons

$$u = \varphi(z),$$

et appelons γ la valeur particulière de z qui correspond au point Γ; la fonction

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

n'aura, comme $\varphi(z)$ ou u, qu'une seule valeur pour chaque valeur de z et sera toujours finie, même pour $z = \gamma$. En effet, la fonction $\varphi(z)$ reprenant sa valeur après une révolution de Z autour de Γ, le système circulaire dont cette fonction fait partie relativement au point Γ n'a qu'un terme (n° **18**) : pour des valeurs suffisamment petites de $z - \gamma$, on peut donc (n° **23**) développer $\varphi(z)$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - \gamma$, de sorte qu'on ait

$$\varphi(z) = \varphi(\gamma) + A(z - \gamma) + B(z - \gamma)^2 + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma} = A + B(z - \gamma) + \ldots.$$

---

[*] Les numéros auxquels je renvoie sont toujours ceux des *Recherches sur les fonctions algébriques*.

par où l'on voit que la fonction

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}$$

conserve, pour $z=\gamma$, la valeur finie A.

En appliquant à cette fonction ce qui a été dit de la fonction u, nous arrivons à cette conclusion, que l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque, est égale à zéro : il en résulte l'équation

$$\varphi(\gamma)\int \frac{dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma},$$

les intégrales des deux membres étant prises le long d'un même contour fermé quelconque. Supposons, ce qui est permis, tous les points de ce contour situés à une distance de l'origine supérieure au module de γ : on trouvera aisément $2\pi\sqrt{-1}$ pour la valeur de l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$. On aura d'ailleurs en série convergente

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z} + \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma^2}{z^3} + \ldots,$$

et, par conséquent, l'équation précédente pourra s'écrire

$$2\pi\sqrt{-1}\,\varphi(\gamma) = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z} + \gamma\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^2} + \gamma^2\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^3} + \ldots,$$

les intégrales du second membre pouvant maintenant être prises le long d'un contour fermé quelconque, pourvu qu'il renferme l'origine des coordonnées, par exemple le long d'une circonférence décrite de cette origine comme centre.

Cela posé, appelons n, p, q, r,..., s, t les degrés par rapport à z des polynômes entiers N, P, Q, R,..., S, T et désignons par μ un nombre entier supérieur au plus grand des nombres

$$p,\quad \frac{n+q}{2},\quad \frac{2n+r}{3},\ \ldots,\quad \frac{(m-2)n+s}{m-1},\quad \frac{(m-1)n+t}{m}.$$

De l'équation (1) mise sous la forme

$$\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^m + \frac{P}{z^\mu}\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^{m-1} + \frac{NQ}{z^{2\mu}}\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^{m-2} + \ldots + \frac{N^m S}{z^{(m-1)\mu}}\frac{u}{z^\mu} + \frac{N^{m+1}T}{z^{m\mu}} = 0,$$

nous conclurons que toutes les valeurs de $\frac{u}{z^\mu}$ convergent vers zéro, quand z augmente jusqu'à l'infini : ainsi le module de $\frac{\varphi(z)}{z^\mu}$ pourra être rendu aussi petit que l'on voudra, en prenant celui de z assez grand. Or, si l'on appelle M le maximum des valeurs que prend le module de $\frac{\varphi(z)}{z^\mu}$ le long d'une circonférence décrite de l'origine comme centre, l'intégrale $\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{\mu+1}}$, prise le long de cette circonférence, aura un module moindre que le produit $2\pi M$ de M par le module 2π de $\int \frac{dz}{z}$: par suite, le coefficient de γ^μ dans le développement de $\varphi(\gamma)$ aura un module moindre que M. Mais en prenant le rayon assez grand, on peut rendre M aussi petit qu'on le veut; d'autre part, le coefficient dont il s'agit est une quantité déterminée indépendante de ce rayon; il faut donc qu'il soit nul. Ainsi le développement de $\varphi(\gamma)$ ne contient aucune puissance de γ dont l'exposant soit supérieur au plus grand des nombres

$$p, \quad \frac{n+q}{2}, \quad \frac{2n+r}{3}, \ldots, \quad \frac{(m-1)n+t}{m}:$$

ce développement se compose donc d'un nombre limité de termes, ce qui revient à dire que $\varphi(\gamma)$ est une fonction entière de γ ou, si l'on veut, que u est une fonction entière de z. Par suite, la fonction v égale à $\frac{u}{N}$ est une fonction rationnelle de z, ainsi que je l'avais annoncé.

Je reviens maintenant à l'équation irréductible

$$f(u, z) = 0,$$

à laquelle satisfont les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, et je dis qu'ayant choisi à volonté deux de ces fonctions, u_1 et u_n par exemple, on

pourra toujours tracer, à partir d'un point donné C, un contour fermé tel, qu'après une révolution de Z sur ce contour, u_1 acquière la valeur initiale de u_n.

En effet, s'il en était autrement, les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ se partageraient en deux groupes, l'un G formé de la racine u_1 et des racines dont u_1 peut acquérir la valeur initiale, l'autre G′ formé des racines dont u_1 ne peut acquérir la valeur initiale et parmi lesquelles se trouverait u_n. Or, quel que soit le contour fermé (Δ) qu'on fasse décrire à Z à partir du point C, aucune des racines du premier groupe ne pourra échanger sa valeur initiale avec une racine du second : car, si, après une révolution de Z sur (Δ), la racine u_i du groupe G acquérait la valeur initiale d'une racine $u_{i'}$ du groupe G′, comme on peut trouver un contour fermé (Γ) sur lequel u_1 acquière la valeur initiale du u_i, il s'ensuivrait qu'après une révolution de Z sur le contour fermé $(\Gamma)(\Delta)$, u_1 acquerrait la valeur initiale de $u_{i'}$, ce qui est contraire à la définition de nos deux groupes.

Les racines du groupe G ne pouvant échanger qu'entre elles leurs valeurs initiales, une fonction symétrique λ de ces racines reprendra toujours la même valeur, par quelque chemin que le point mobile Z revienne en C. On en conclut facilement que λ n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de z : en effet, soit

$$F(\lambda, z) = 0$$

l'équation algébrique à laquelle λ satisfait; on peut toujours supposer qu'au point C, λ est une racine simple de cette équation (si le contraire avait lieu, on remplacerait le point C par un point infiniment voisin). Admettons à présent qu'en un point K, λ puisse acquérir deux valeurs différentes h et h', suivant que Z y arrive par le chemin CLK ou par le chemin CMK. Parmi les fonctions $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., que détermine l'équation

$$F(\lambda, z) = 0,$$

il y en aurait une $\lambda^{(i)}$ autre que λ qui acquerrait en K la valeur h, lorsque Z suivrait le chemin CMK; alors, en faisant décrire à Z le contour fermé CLKMC, on verrait λ prendre au point C la valeur

initiale de λ', ce qui est impossible, puisque λ doit toujours reprendre la même valeur au point C.

La fonction λ, n'ayant qu'une valeur pour un point quelconque K, c'est-à-dire pour une valeur quelconque de z, serait nécessairement une fonction rationnelle de z, ainsi qu'on l'a prouvé plus haut. On pourrait donc exprimer rationnellement en z la somme des racines qui composent le groupe G, puis celle de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. : ces racines satisferaient, par suite, à une équation algébrique d'un degré moindre que le degré de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que celle-ci est irréductible. Concluons donc qu'on peut toujours tracer par le point C un contour fermé sur lequel u_1 acquière la valeur initiale de u_n.

J'arrive enfin à la proposition qui fait l'objet spécial de cette Note : soit v_1 la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un chemin quelconque CMK; soit p la valeur de l'intégrale $\int u_n\,dz$ prise le long d'un contour fermé tel, que la fonction u_n reprenne sa valeur initiale après une révolution de Z. On pourra déformer ce contour de manière qu'il passe au point C sans altérer la valeur de p qui sera ce que j'ai appelé une période; quant au contour ainsi déformé, je désignerai par (Φ) sa caractéristique. Pour voir maintenant qu'en ajoutant p à v_1, on a encore une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, il suffit de se rappeler qu'on peut toujours tracer à partir du point C un contour fermé (Γ) tel, qu'après une révolution de Z sur ce contour, u_1 acquière la valeur initiale de u_n, et qu'alors sur le même contour parcouru en sens contraire $(-\Gamma)$, u_n acquerra la valeur initiale de u_1. Si donc on prend l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ le long du chemin

$$(\Gamma)(\Phi)(-\Gamma) + \mathrm{CMK},$$

les portions relatives aux parties (Γ), $(-\Gamma)$ de la caractéristique seront égales et de signes contraires, et la valeur de l'intégrale se ré-

duira à

$$p + v_1.$$

De même, la valeur de la même intégrale prise le long du chemin

$$(\Gamma)(-\Phi)(-\Gamma) + \text{CMK}$$

sera

$$-p + v_1.$$

Ainsi, à une valeur quelconque v_1 de l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$ on peut ajouter ou retrancher une période quelconque p, et, par conséquent, ajouter ou retrancher des multiples entiers quelconques de toutes les périodes : en d'autres termes, chaque période appartient à toutes les valeurs de l'intégrale, si, comme je l'ai supposé, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est irréductible.

II.

Soient toujours $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les m fonctions de z qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0;$$

j'ai prouvé tout à l'heure qu'en faisant partir le point Z d'une position donnée et l'y ramenant par des chemins convenablement choisis, on pouvait faire acquérir à la fonction u_1 les valeurs de toutes les autres, pourvu que l'équation fût irréductible. C'est ce que l'on peut exprimer en disant qu'une fonction algébrique qui satisfait à une équation irréductible du degré m a précisément m valeurs pour chaque valeur de z : il est bien entendu qu'on doit excepter les valeurs de z en nombre limité pour lesquelles l'équation a des racines égales.

Il n'en serait plus de même si l'équation n'était pas réductible : supposons, en effet, que le polynôme $f(u, z)$ soit le produit de deux polynômes premiers entre eux $\varphi(u, z)$, $\psi(u, z)$. Les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_m$ se partageront en deux groupes formés, l'un de celles qui satisfont à l'équation

$$\varphi(u, z) = 0,$$

l'autre de celles qui satisfont à l'équation

$$\psi(u, z) = 0.$$

Les fonctions de chaque groupe n'échangeront leurs valeurs qu'entre elles; chacune des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aura donc un nombre de valeurs au plus égal au degré en u de l'un des polynômes $\varphi(u, z)$, $\psi(u, z)$, et, par conséquent, moindre que m.

La réciproque de la proposition précédente est également vraie, savoir qu'une fonction algébrique de z, qui a m valeurs pour chaque valeur de z, satisfait à une équation irréductible du degré m : car, si l'équation irréductible qu'elle vérifie était d'un degré n différent de m, la fonction aurait n valeurs, tandis qu'elle en a m par hypothèse. En particulier, si la fonction n'a qu'une valeur, elle est nécessairement rationnelle, comme on l'a vu ci-dessus.

Proposons-nous maintenant de reconnaître si une équation algébrique à deux variables

$$f(u, z) = 0,$$

dont les coefficients réels ou imaginaires sont donnés numériquement, est irréductible ou non [*].

Les valeurs de z qui font acquérir des racines égales ou infinies à l'équation proposée sont les racines d'une équation

$$\varphi(z) = 0,$$

qu'on sait former : ces valeurs sont donc en nombre limité; je les appellerai a, a', a'', etc., et elles correspondront à des points que je nommerai A, A′, A″, etc. Je désignerai, en outre, par c une valeur de z arbitraire, mais différente toutefois des quantités a, a', a'', etc., et par C le point correspondant. L'équation

$$f(u, c) = 0$$

aura m racines inégales $b_1, b_2, \ldots, b_m$ qu'on pourra regarder comme

[*] J'exclus le cas où cette équation aurait des racines égales, quelle que soit z; si cela avait lieu, elle se partagerait en plusieurs autres par la théorie connue des racines égales.

les valeurs initiales des m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Décrivons, à partir du point C, des contours fermés dont chacun renferme un seul des points A, A′, A″, etc., tous les autres lui étant extérieurs, et représentons par (A) le contour qui renferme le point A, par (A′) celui qui renferme le point A′, et ainsi de suite. On saura déterminer, comme je l'ai expliqué dans le Mémoire déjà cité, n^{os} **28** et **29**, quelle est, pour chacun de ces contours élémentaires, la fonction $u_{i'}$ dont une fonction u_i acquiert la valeur initiale $b_{i'}$ après une révolution du point Z. On trouvera ainsi que la fonction u_1, par exemple, peut acquérir après une révolution de Z sur un seul contour élémentaire les valeurs initiales d'un certain nombre d'autres fonctions $u_n, u_p, \ldots, u_r$: on trouvera de même, en considérant chacune de celles-ci en particulier, les fonctions dont elles peuvent acquérir les valeurs initiales après une révolution de Z sur un contour élémentaire. Si parmi ces fonctions il y en a d'autres que $u_1, u_n, u_p, \ldots, u_r$ et qu'on les désigne par $u_{n'}, u_{p'}, \ldots, u_{r'}$, on cherchera encore les fonctions dont $u_{n'}, u_{p'}, \ldots, u_{r'}$ peuvent acquérir les valeurs initiales par une révolution de Z sur un contour élémentaire : si l'on arrive ainsi à des fonctions $u_{n''}, u_{p''}, \ldots, u_{r''}$ qu'on n'ait pas encore rencontrées, on continuera de la même manière, jusqu'à ce qu'on ne retrouve plus que des fonctions déjà obtenues; c'est ce qui arrivera nécessairement après un nombre limité de recherches de ce genre. On connaîtra ainsi toutes les fonctions distinctes $u_1, u_n, u_p, \ldots, u_r, u_{n'}, u_{p'}, \ldots, u_{r'}, u_{n''}$, etc., dont u_1 peut acquérir les valeurs initiales. Cela fait, il arrivera de deux choses l'une : ou ces fonctions seront au nombre de m, de manière que leur ensemble soit justement celui des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$; dans ce cas, la fonction u_1 aura m valeurs et l'équation

$$f(u, z) = 0$$

sera certainement irréductible : ou bien le nombre μ de ces fonctions sera moindre que m, et alors la fonction u_1 ayant μ valeurs satisfera à une équation irréductible du degré μ; l'équation proposée ne sera donc pas irréductible.

Appelons, dans ce dernier cas, $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ les fonctions dont u_1 peut acquérir les valeurs initiales; ces fonctions n'échangeront leurs

valeurs qu'entre elles. Parmi les racines restantes de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

prenons-en une à volonté $u_{\mu+1}$; on trouvera de même qu'elle peut acquérir les valeurs d'un certain nombre ν de fonctions que j'appelle $u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \ldots, u_{\mu+\nu}$. S'il reste encore des racines, on trouvera semblablement un nouveau groupe de ρ fonctions pouvant échanger leurs valeurs, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toute la série des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$. On saura donc que l'équation proposée

$$f(u, z) = 0$$

se partage en autant d'équations irréductibles qu'on a formé de groupes, et les degrés de ces groupes seront respectivement les nombres μ, ν, ρ, etc.

On a donc un procédé pour reconnaître si une équation entre deux variables est irréductible, et, si elle ne l'est pas, pour déterminer les degrés des équations irréductibles dans lesquelles elle se partage. Il serait même aisé de former les fonctions entières de z qui servent de coefficients aux diverses puissances de u dans ces équations; mais j'omets ces détails pour abréger.

Il est bon d'observer que, dans l'application, il ne sera pas nécessaire d'avoir les valeurs exactes des racines a, a', a'', etc., de l'équation

$$\varphi(z) = 0;$$

il suffira d'avoir pour chacun des points correspondants A, A', A'', etc., un contour qui le renferme seul. Or on saura toujours effectuer cette séparation à l'aide du beau théorème de M. Cauchy sur le nombre des racines imaginaires renfermées dans un contour.

Prenons pour exemple l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

qui devient celle de la trisection de l'angle, lorsqu'on y remplace z par $-\frac{2x}{3\sqrt{3}}$ et u par $\frac{2y}{\sqrt{3}}$. Il n'y a que deux valeurs de z qui lui fassent

acquérir des racines égales, savoir :

$$z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad z = -\frac{2}{3\sqrt{3}};$$

appelons A et A′ les points correspondants et nommons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions qui vérifient l'équation proposée et dont les valeurs initiales, pour $z = 0$, sont respectivement 0, $+1$, -1 : on trouve sans peine, n° **32**, qu'après une révolution de Z sur le contour (A), u_1 acquiert la valeur initiale de u_2, et qu'après une révolution de Z sur le contour (A′), u_1 prend la valeur initiale de u_3. La fonction u_1 a donc trois valeurs, et, par suite, l'équation

$$u^3 - u + z = 0$$

est irréductible, ce qui, d'ailleurs est évident, en y regardant z comme une fonction de u.

MÉMOIRE

Sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation;

PAR J. LIOUVILLE.

Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences le 30 janvier 1843 et publié la même année dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1846. Je cède au désir de quelques-uns de mes amis en le faisant réimprimer ici.

I.

1. M. Jacobi a reconnu le premier qu'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe, et dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances, peut se maintenir d'elle-même en équilibre sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Il suffit que les trois demi-axes k, k', k'' et la vitesse angulaire constante V, avec laquelle le liquide tourne autour de l'axe de rotation k, satisfassent aux deux équations de condition

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{k'^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k''^2}\right)\mathrm{D}} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{k^2}\right)\mathrm{D}}$$

et

$$\mathrm{V}^2 = \frac{2\pi\rho}{k'^2 k''^2}\int_0^\infty \frac{\alpha\, d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{k'^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k''^2}\right)\mathrm{D}};$$

dans lesquelles

$$D = \sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{k^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k'^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{k''^2}\right)}.$$

En empruntant ces formules au XXIIIe cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, où j'en ai donné une démonstration simple, j'ai cru devoir rétablir le facteur ρ, représentant la densité qu'on avait d'abord supposée égale à 1.

2. Maintenant soient

$$k' = \frac{k}{\sqrt{s}}, \qquad k'' = \frac{k}{\sqrt{t}},$$

puis

$$\alpha = k^2 u, \quad d\alpha = k^2 du,$$

et enfin

$$\sqrt{(u+1)(su+1)(tu+1)} = R;$$

la première de nos équations de condition deviendra

$$(1) \qquad (1-s-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3} = 0;$$

en faisant de plus

$$\frac{V^2}{2\pi\rho} = v,$$

la seconde équation prendra ensuite la forme

$$(2) \qquad v = st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)R}.$$

C'est donc des équations (1) et (2) que dépendent les valeurs essentiellement positives, des rapports s et t, lorsqu'on se donne la vitesse V, ou, ce qui revient au même, la quantité v. A l'inspection seule de l'équation (1), on voit bien que l'on doit avoir $s + t < 1$, et a fortiori $s < 1$, $t < 1$, d'où résulte $k < k'$, $k < k''$; en sorte que l'axe autour duquel le corps tourne est le petit axe de l'ellipsoïde. Il est aisé aussi de démontrer qu'à toute valeur de s ou de t, inférieure à l'unité, répond au moins une valeur de t ou de s pour laquelle l'équation (1) a lieu; l'équation (2) fournira ensuite pour v une valeur qui pourra être très-petite, mais qui ne dépassera jamais un certain

maximum. Voilà ce qu'on a su d'abord. Mais la discussion complète des deux équations transcendantes simultanées (1) et (2) offrait un problème difficile qu'un jeune géomètre de Kœnigsberg, M. Meyer, a fort habilement résolu. Soit, pour fixer les idées, $s > t$ (ou $k' < k''$). M. Meyer prouve que pour chaque valeur de v inférieure à une certaine limite v' répondant au cas extrême de $s = t$, il y a un seul couple de valeurs correspondantes s, t; s allant en diminuant à partir de l'unité et t en augmentant à partir de zéro, à mesure que v augmente. Quand on prend $v > v'$, les équations en s et t n'ont plus de solutions réelles [*]. La valeur limite de v est à peu près $v' = 0,1871$; elle est inférieure à la limite analogue $v'' = 0,2246\ldots$, que l'on trouve en discutant, sous le même point de vue, les ellipsoïdes de révolution.

Donc « pour toute valeur de v comprise entre 0 et $0,1871\ldots$, il y » a trois formes ellipsoïdales qui conviennent à l'équilibre : une d'elles » est à trois axes inégaux, les deux autres sont de révolution; les » deux ellipsoïdes de révolution continuent seuls à exister à partir de » $v = 0,1871\ldots$, du moins tant qu'on n'a pas $v = 0,2246\ldots$. Quand v » atteint cette dernière valeur, ils se confondent en un seul; au delà » l'équilibre est impossible avec une figure elliptique. » Ce que nous avons dit des racines s et t, joint à ce qu'on sait depuis longtemps sur les ellipsoïdes de révolution, suffit, du reste, pour bien fixer la loi que suivent dans tous ces changements de vitesse les excentricités des sections principales.

3. Je me suis proposé de traiter la même question sous un autre point de vue, que déjà Laplace avait indiqué en s'occupant des ellipsoïdes de révolution. Je pense, comme ce grand géomètre, que dans la question de l'équilibre d'une masse liquide, la véritable donnée physique dont il faut partir n'est pas la vitesse, mais plutôt le moment de rotation, ou, autrement dit, la somme des aires décrites sur le

[*] En lisant dans le Journal de M. Crelle, tome XXIV, page 44, le Mémoire de M. Meyer, on y trouvera quelques fautes d'impression ou peut-être même de calcul; mais les conclusions auxquelles l'auteur arrive n'en sont pas moins parfaitement exactes.

plan de l'équateur par les projections des rayons vecteurs menés du centre de gravité à chacune des molécules égales du système. Les causes qui ont agi primitivement sur le liquide n'ont pas dû, en effet, lui communiquer un simple mouvement de rotation autour d'un axe fixe; il y a eu naturellement à l'origine des mouvements irréguliers autour du centre de gravité : ce n'est qu'au bout d'un certain temps que ces mouvements irréguliers auront disparu, par suite des frottements mutuels des diverses parties du liquide. Considérons donc, avec Laplace, une masse liquide agitée par des forces quelconques, puis abandonnée à elle-même et à l'attraction mutuelle de toutes ses parties. Si par le centre de gravité de cette masse on conçoit un plan par rapport auquel la somme des aires décrites soit à l'origine du mouvement un *maximum*, ce plan, en vertu d'un principe connu, jouira constamment de cette propriété, quelle que soit la manière dont les molécules agissent les unes sur les autres, soit par leur ténacité, soit par leur attraction et leur choc mutuel. Ainsi, lorsqu'après un grand nombre d'oscillations la masse fluide prendra un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, cet axe sera perpendiculaire au plan dont nous venons de parler, et qui sera, par conséquent, l'équateur du système; de plus, la somme des aires décrites sur ce plan se sera conservée dans ce dernier état telle qu'elle était d'abord. Cette somme d'aires décrites établit donc seule quelque liaison entre l'état primitif du système et son état final; seule elle reste constante, inaltérable, au milieu des changements successifs que le liquide éprouve avant d'acquérir une figure permanente. Comment se refuser à reconnaître qu'elle est ici l'élément essentiel des problèmes qu'on doit se proposer?

D'après ces considérations, je prends comme donnée primitive, non plus la vitesse V, mais le moment de rotation μ, c'est-à-dire le produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie. Le carré de ce produit est

$$\mu^2 = \frac{M}{25}\left(k'^2 + k''^2\right)^2 V^2 = \frac{M k'}{25} \cdot \frac{k'' + k'}{k'} \cdot V^2,$$

M étant la masse de l'ellipsoïde; or, de l'équation

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho k k' k'' = \frac{4\pi\rho k}{3\sqrt{\varepsilon}},$$

on tire

$$k^3 = \left(\frac{3\,M}{4\,\pi\,\rho}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot (st)^2.$$

Il vient dès lors

$$\rho^2 = \frac{M^2}{25} \cdot \left(\frac{3\,M}{4\,\pi\,\rho}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}} \cdot V^2,$$

ou

$$\rho^2 = \frac{2\,\pi\,\rho\,M^2}{25} \cdot \left(\frac{3\,M}{4\,\pi\,\rho}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}} \cdot v.$$

En représentant par q le rapport du carré du moment de rotation à la constante

$$\frac{2\,\pi\,\rho\,M}{25} \cdot \left(\frac{3\,M}{4\,\pi\,\rho}\right)^{\frac{5}{3}},$$

nous aurons donc

$$(3) \qquad q = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}} \cdot v = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{4}{3}}} \int_0^{\infty} \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)\,R}$$

et l'équation (3) remplacera l'équation (2).

A l'aide des équations (1) et (3), je prouve que, pour toute valeur de q supérieure à un certain *minimum* q', qui répond à $s = t$, il n'y a qu'un seul couple (s, t) satisfaisant aux équations (1) et (3), tandis que pour $q < q'$ il n'y a plus de solutions réelles. Pour chaque valeur de q (Laplace l'a démontré), un seul ellipsoïde de révolution satisfait à l'équilibre; un seul ellipsoïde à trois axes y satisfait aussi, comme on voit, dès que q surpasse q', mais non pour des valeurs de q plus petites. La plus petite valeur q', qui rend possible une figure à trois axes, répond du reste à la plus petite valeur de s, c'est-à-dire à la plus grande valeur de t et de V; q augmentant jusqu'à l'infini, s augmente jusqu'à sa limite supérieure 1; au contraire, V et t diminuent jusqu'à zéro.

Quand les rapports s et t sont déterminés, on en conclut aisément les valeurs des trois demi-axes k, k', k''; je me suis assuré que le petit axe k, autour duquel la rotation s'effectue, augmente à mesure que V augmente ou que q diminue; l'axe moyen k' augmente aussi, et même dans un plus grand rapport; au contraire, le grand axe k'' diminue.

Voilà les théorèmes; passons aux démonstrations, du moins en ce qui concerne les ellipsoïdes à trois axes. Quant aux ellipsoïdes de révolution, voyez la *Mécanique céleste*.

II.

4. Les rapports s et t étant essentiellement positifs, l'équation (1) exige que l'on ait $s + t < 1$, ou tout au plus $s + t = 1$; sans cela, en effet, le premier membre serait la somme de deux termes négatifs, et ne pourrait se réduire à zéro. A plus forte raison, chacun des deux nombres s, t est assujetti à ne pas surpasser l'unité.

Désignons par F le premier membre de l'équation (1), c'est-à-dire posons

$$F = (1 - s - t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R^3}.$$

Il est aisé de former les deux dérivées partielles de F par rapport à s et t. On trouve

$$\frac{dF}{ds} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u(u+1)(tu+1)}{R^5}\left[2 + (3 - s - t)u - stu^2\right]du,$$

valeur qui prend la forme

$$\frac{dF}{ds} = -A_0 - A_1 t, \tag{4}$$

lorsqu'on pose

$$2A_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}\left[2 + (3 - s - t)u - stu^2\right]du. \tag{5}$$

$$2A_1 = \int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^5}\left[2 + (3 - s - t)u - stu^2\right]du. \tag{6}$$

A_0 et A_1 étant symétriquement composés en s et t, il vient de même

$$\frac{dF}{dt} = -A_0 - A_1 s. \tag{7}$$

Nous nous bornons à considérer des valeurs de s, t positives et telles que $s + t$ ne surpasse pas l'unité. Cela étant, je dis que A_0 et $2A_0 + 3A_1$ sont > 0. Pour le démontrer, j'observe qu'en intégrant

par rapport à u, entre les limites o et ∞, l'équation identique

$$d\frac{u^2}{(su+1)(tu+1)R} = \frac{4u+(3+s+t)u^2-2stu^3-3stu^4}{2(su+1)(tu+1)R^3}\,du.$$

on obtient

$$8 \qquad 0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^3}\left[4+(3+s+t)u-2stu^2-3stu^3\right]du.$$

En retranchant de l'équation (5) l'équation (8), après avoir divisé cette dernière par 2, on conclut

$$2A_0 = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^3}(1-s-t+stu^2)\,du.$$

En ajoutant les équations (5), (6), (8), après les avoir multipliées par les facteurs respectifs 1, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, on a semblablement

$$2A_0+3A_1 = \frac{3}{2}(3-s-t)\int_0^\infty \frac{u^2(u+1)^2\,du}{R^3}.$$

Or, à la simple inspection de ces formules, on voit que A_0 et $2A_0+3A_1$ sont des quantités positives, comme nous l'avons avancé.

En écrivant dès lors les équations (5) et (7) sous la forme

$$\frac{dF}{ds} = -A_0\left(1-\frac{2}{3}t\right)-\frac{t}{3}(2A_0+3A_1),$$

$$\frac{dF}{dt} = -A_0\left(1-\frac{2}{3}s\right)-\frac{s}{3}(2A_0+3A_1),$$

on se convaincra que les deux dérivées partielles de F sont négatives. F est donc une fonction décroissante de s et de t.

5. Donnons à t une valeur quelconque comprise entre o et 1; il y aura au moins pour s une valeur correspondante qui vérifiera l'équation (1); car en faisant successivement $s=0$, puis $s=1$ dans son premier membre F, on a deux résultats de signes contraires. Pour $s=1$, les deux termes dont F se compose sont négatifs. Pour $s=0$, le premier terme est positif et le second est nul; on s'assurera de ce dernier fait en observant que R^3, ou

$$(u+1)^{\frac{3}{2}}(tu+1)^{\frac{3}{2}}(su+1)^{\frac{3}{2}},$$

diminue lorsqu'on y remplace $u+1$ par u et $su+1$ par su ou par 1 d'où résulte

$$st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{R} < t\sqrt{s}\int_0^\infty \frac{du}{(tu+1)^2} < 2\sqrt{s},$$

quantité qui s'évanouit avec s. J'ajoute que l'équation n'a qu'une seule racine réelle. Car si l'on prétend qu'il y en a plusieurs, soit s' la plus grande, les autres devraient être moindres que s'; or ayant déjà $s'+t<1$, on aura à fortiori $s+t<1$ pour $s<s'$; dès lors, en faisant décroître s depuis s' jusqu'à zéro, F ira en croissant à partir de zéro et ne pourra plus s'annuler. L'existence d'une seconde racine s est donc inadmissible.

Pour chaque valeur de s comprise entre 0 et 1, l'équation (1) a de même une seule racine réelle t.

Faisons maintenant décroître s à partir de sa plus grande valeur 1, qui répond à $t=0$; F augmentera par cela même et ne pourra se retrouver nulle que si t augmente. L'équation (1) étant donc supposée avoir lieu, si s diminue, t augmentera et l'on finira par avoir $t=s$, puis $t>s$. Mais il est clair qu'on peut se borner aux valeurs de s et t pour lesquelles on a $s>t$. Cela revient à supposer que l'axe désigné par k' est le plus petit des deux axes de l'équateur de nos ellipsoïdes. Soit τ la valeur de t pour laquelle on a $s=t$; cette valeur τ sera la racine de l'équation

$$(9)\qquad (1-\tau)\int_0^\infty \frac{u\,du}{(\tau u+1)^2(u+1)^2} = \tau^2\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{(\tau u+1)^2(u+1)^2}$$

elle est un peu plus grande que $\frac{1}{2}$; et t variant de 0 à τ, s variera de 1 à τ.

6. Voyons comment se comporte à son tour la vitesse V de rotation ou plutôt la quantité v qui est proportionnelle à V^2. On a

$$dv = \frac{dv}{ds}\,ds + \frac{dv}{dt}\,dt;$$

mais, d'un autre côté, l'équation $F=0$ fournit

$$\frac{dF}{ds}\,ds + \frac{dF}{dt}\,dt = 0.$$

il suit de là que

$$dv = \frac{dt}{\left(\frac{dF}{ds}\right)}\left(\frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt}\right).$$

On trouve du reste

$$(10)\qquad \frac{dv}{ds} = t\int_0^\infty \frac{u(u+1)^2(tu+1)}{R^5}\left(1 - \tfrac{1}{2}su\right)du,$$

valeur qu'on peut mettre sous la forme

$$(11)\qquad \frac{dv}{ds} = tB_0 + t\left(t - \tfrac{1}{2}s\right)B_1,$$

en posant

$$B_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}\left(1 - \tfrac{1}{2}stu^2\right)du, \quad B_1 = \int_0^\infty \frac{u^2(u+1)^2}{R^5}du;$$

de là résultera, à cause de la symétrie,

$$(12)\qquad \frac{dv}{dt} = sB_0 + s\left(s - \tfrac{1}{2}t\right)B_1.$$

Le coefficient B_1 est évidemment positif. Pour reconnaître le signe de B_0, je retranche de l'équation

$$4B_0 = \int_0^\infty \frac{u(u+1)}{R^5}\left(4 + 4u - 2stu^2 - 2stu^3\right)du$$

l'équation identique (8), ce qui me donne

$$4B_0 = \int_0^\infty \frac{u^2(u+1)}{R^5}\left[1 - s - t + stu^2\right]du.$$

et par suite

$$B_0 > 0.$$

A l'aide des équations (5), (7), (11), (12), on trouve immédiatement la valeur de

$$\frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt} - \frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds},$$

savoir,

$$(s - t)\left[A_0B_0 - (s + t)A_0B_1 + \tfrac{3}{2}stA_1B_1\right],$$

laquelle peut s'écrire

$$(s - t)\left[A_0B_0 + \tfrac{1}{2}stA_0B_1 + \tfrac{1}{2}stB_1(2A_0 + 3A_1) + \left(s + t - \tfrac{3}{2}st\right)A_0B_1\right].$$

cette valeur est positive puisque celles de A_0, $2A_0 + 3A_1$, B_0, B_1, $s - t$ le sont, et qu'on a aussi

$$s + t - \tfrac{3}{2}st = s\left(1 - \tfrac{3}{4}t\right) + t\left(1 - \tfrac{3}{4}s\right) > 0.$$

Puisque

$$\frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt} - \frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds}$$

est une quantité positive,

$$\frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt}$$

sera au contraire négative; $\frac{dF}{ds}$ l'étant aussi, l'équation

$$dv = \frac{dt}{\left(\frac{dF}{ds}\right)}\left(\frac{dv}{dt}\frac{dF}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dF}{dt}\right)$$

nous montre que dv et dt sont de même signe. Ainsi, quand t augmente, v augmente.

Nous voyons par l'équation

$$(2) \qquad v = st\int_0^\infty \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)R},$$

qu'à $t = 0$ répond $v = 0$. En effet, l'intégrale qui s'y trouve augmente quand on remplace $tu + 1$ par t ou par 1, et $u + 1$ par u; de sorte que l'on a

$$v < s\sqrt{t}\int_0^\infty \frac{du}{(su+1)^2} < 2\sqrt{t},$$

quantité qui s'évanouit avec t. A $t = \tau = s$ répond une valeur v' de v, la plus grande que v puisse obtenir; et quand v croît de 0 à v', t augmente de 0 à τ et s diminue de 1 à τ. A chaque valeur de v comprise entre 0 et v' répond ainsi un seul couple (s, t) de solutions réelles des équations (1) et (2), c'est-à-dire un ellipsoïde à trois axes en équilibre. Pour des valeurs de $v > v'$, un tel ellipsoïde ne peut plus exister. Ajoutons que les ellipsoïdes à trois axes ainsi obtenus sont tous différents entre eux. A mesure que v augmente, et que s et t se rapprochent de τ, leur forme tend de plus en plus vers celle d'une des figures de révolution de Maclaurin, qu'elle atteint lorsque $v = v'$.

Ainsi se trouve démontré le beau théorème de M. Meyer que nous avons énoncé plus haut.

III.

7. Maintenant, discutons la quantité q à laquelle le moment de rotation est proportionnel. En différentiant l'équation (3), on a

$$dq = \frac{(s+t)}{(st)^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{dv}{ds}ds + \frac{dv}{dt}dt\right) + \frac{2v(s+t)}{3(st)^{\frac{5}{3}}}\left[(st - 2t^2)ds + (st - 2s^2)dt\right].$$

A cause de

$$\frac{dF}{ds}ds + \frac{dF}{dt}dt = 0,$$

cette valeur devient

$$dq = \frac{(s+t)^2 dt}{(st)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{dF}{ds}\right)}\left[\left(\frac{dv}{dt} + \frac{2t-4s}{3t(s+t)}v\right)\frac{dF}{ds} - \left(\frac{dv}{ds} + \frac{2s-4t}{3s(s+t)}v\right)\frac{dF}{dt}\right].$$

En remplaçant v, $\frac{dv}{ds}$, $\frac{dF}{dt}$ par leurs valeurs que fournissent les équations (2), (10) et (7), on en conclura l'expression de

$$\left(\frac{dv}{ds} + \frac{2s-4t}{3s(s+t)}v\right)\frac{dF}{dt}$$

pour avoir

$$\left(\frac{dv}{dt} + \frac{2t-4s}{3t(s+t)}v\right)\frac{dF}{ds},$$

il suffira de permuter ensuite entre elles les deux lettres s et t. Il viendra ainsi pour dq une valeur de la forme

$$dq = \frac{(s+t)^2 dt}{(st)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{dF}{ds}\right)}(s-t)\int_0^\infty \frac{u(u+1)^2 du}{R^3}(C_0 + C_1 u + C_2 u^2),$$

C_0, C_1, C_2 étant des coefficients indépendants de u, savoir :

$$C_0 = \frac{A_0}{3} + \frac{2st}{s+t}A_1,$$

$$C_1 = \frac{(s+t)}{3}A_0 + \frac{1}{2}stA_1,$$

$$C_2 = st\left(\frac{11A_0}{6} + \frac{2st}{s+t}A_1\right).$$

où A_0, A_1 conservent la même signification que ci-dessus. La valeur du premier de ces coefficients peut s'écrire

$$C_0 = \frac{2st}{3(s+t)}(2A_0 + 3A_1) + \frac{A_0}{3(s+t)}(s + t - 4st);$$

or A_0 et $2A_0 + 3A_1$ sont > 0; d'un autre côté l'inégalité $s + t < 1$ donne

$$s + t - 4st > (s+t)^2 - 4st,$$

c'est-à-dire

$$s + t - 4st > (s - t)^2 > 0;$$

donc C_0 est > 0. Il en est de même à fortiori de C_1, C_2 et par suite de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u^2(u+1)^2\,du}{R^3}(C_0 + C_1 u + C_2 u^2),$$

puisque l'on a, comme il est aisé de le voir,

$$C_1 = \frac{s+t}{4}(C_0 + A_0),$$

$$C_2 = st\left(C_0 + \tfrac{3}{2}A_0\right).$$

Revenant donc à la valeur de dq et se rappelant que des deux quantités $(s - t)$, $\left(\frac{dF}{ds}\right)$, la premiere est positive et la seconde négative, on verra que dq et dt sont de signes contraires. Ainsi les variations de q ont lieu dans le même sens que celles de s, et en sens opposé à celles de V et de t. La plus petite valeur q' de q répond ainsi au cas de $s = t = \tau$, c'est-à-dire à l'ellipsoïde de révolution qui sert de lien aux figures d'équilibre de Maclaurin et de M. Jacobi. A mesure que s grandit et que t diminue, q grandit aussi; enfin pour $s = 1$ et $t = 0$, on a $q = \infty$, comme on le voit sans peine par la formule (3) qui donne

$$q = \frac{(s+t)^2}{(st)^2}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(su+1)(tu+1)R}.$$

Ainsi q prend successivement toutes les valeurs de q' à ∞, et en même temps t varie de τ à 0 et s de τ à 1, ce qui répond à des ellipsoïdes essentiellement différents entre eux. Dès lors on voit qu'à chaque valeur de $q > q'$ répond un seul ellipsoïde à trois axes propre

à l'équilibre, solution qui s'ajoute à celle de l'ellipsoïde de révolution répondant à la même valeur de q. Mais pour des valeurs de $q < q'$, l'ellipsoïde de révolution est seul possible.

8. Quand les valeurs de s et t, qui conviennent à l'équilibre d'une masse liquide M, sont connues, celles des axes k, k', k'' résultent des formules

$$k = \left(\frac{3\mathrm{M}}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (st)^{\frac{1}{6}}, \quad k' = \frac{k}{\sqrt{s}}, \quad k'' = \frac{k}{\sqrt{t}}.$$

Puisque l'on a $t < s < 1$, l'axe de rotation k est le petit axe de l'ellipsoïde, k' est l'axe moyen, k'' le grand axe.

Je vais prouver que le produit st augmente en même temps que t; il en résultera que le petit axe augmente à mesure que la vitesse augmente ou que le moment de rotation diminue; $\frac{1}{\sqrt{s}}$ augmentant aussi alors, il en sera de même du second axe k' et même du rapport de k' à k; enfin le grand axe k'' devra diminuer pour que le volume de l'ellipsoïde reste constant.

On a

$$d(st) = s\,dt + t\,ds:$$

en mettant pour ds sa valeur

$$ds = -\frac{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 s}{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t}\,dt,$$

tirée de l'équation

$$\frac{d\mathrm{F}}{ds}\,ds + \frac{d\mathrm{F}}{dt}\,dt = 0,$$

il vient donc

$$d(st) = \frac{(s-t)\,\mathrm{A}_0\,dt}{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t}:$$

$s - t$, A_0 et $\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 t = -\frac{d\mathrm{F}}{ds}$ sont des quantités positives; donc $d(st)$ et dt sont de même signe, et les deux quantités t et st augmentent ensemble, comme nous l'avons avancé.

Pour une valeur infiniment petite de t, c'est-à-dire pour une vitesse angulaire infiniment petite ou pour un moment de rotation infiniment

grand, le petit axe et l'axe moyen sont infiniment petits; le rapport de ces deux axes diffère infiniment peu de l'unité : quant au grand axe k', il est infini. L'ellipsoïde de M. Jacobi offre alors l'apparence d'une longue aiguille très-mince et à peu près ronde. A mesure que la vitesse de rotation augmente ou que le moment de rotation diminue, le petit axe augmente; mais l'axe moyen augmente aussi et dans une proportion plus considérable : le grand axe, au contraire, diminue; ainsi la longueur de l'aiguille primitive diminue, et en même temps la section presque circulaire qu'elle nous offrait dans le sens perpendiculaire acquiert une excentricité de plus en plus considérable. Enfin pour une certaine vitesse maxima, à laquelle répond la plus petite valeur possible du moment de rotation, l'ellipsoïde se trouve être de révolution autour de son petit axe : ce petit axe et l'axe moyen ont en ce moment leur plus grande valeur; le grand axe est, au contraire, réduit à sa valeur la plus petite.

En terminant ce Mémoire, rendons de nouveau justice à la sagacité déployée par M. Meyer dans son beau travail, où nous avons du reste (il faut le dire) puisé le principe de l'analyse même qui nous a servi à compléter cette théorie.

Sur des équations différentielles qui se rattachent à l'équation de Riccati;

PAR M. E. BRASSINNE,
Professeur aux Écoles d'Artillerie.

1. On sait que l'équation

$$dy + ay^2\,dx = \frac{b}{x^2}\,dx + cx^m\,dx$$

est intégrable dans une infinité de cas. Pour le démontrer, on n'a qu'à poser

$$y = -\frac{l}{x} + z.u$$

(z et u étant deux fonctions inconnues de x, et l une constante indéterminée). Substituons dans l'équation proposée, nous trouverons

$$l\,\frac{dx}{x^2} + z\,du + u.dz + a\left(\frac{l^2}{x^2} - \frac{2lzu}{x} + z^2u^2\right)dx = \frac{b}{x^2}\,dx + cx^m\,dx;$$

on détermine ensuite l de telle sorte que

$$l + al^2 - b = 0.$$

Soit $p = al$, l étant une racine de cette équation, et posons

$$z\left(du - \frac{2pu}{x}\,dx\right) = 0,$$

d'où

$$u = x^{2p};$$

il nous restera l'équation

$$x^{2p}\,dz + ax^{4p}z^2\,dx = cx^m\,dx.$$

Divisant par x^{2p} et posant

$$x^{2p}\,dx = dt,$$

on retrouve la forme de l'équation de Riccati.

Nous avons rappelé cette transformation parce qu'elle démontre qu'une équation de la forme

$$dy + ay^2\,dx = \frac{b}{x^2}\,dx + cx^m\,dx + c'\,x^{m'}\,dx + \ldots$$

peut se ramener à une équation de même forme, mais dans laquelle on pourra réduire à zéro un quelconque des exposants m, m',.... Il suffira pour cela de faire usage de la transformation précédente et de poser

$$\frac{b}{x^2} = \frac{b'}{x^2} + \frac{b''}{x^2};$$

on déterminera ensuite l'arbitraire b' de telle sorte que la racine de l'équation du second degré $l + al^2 - b' = 0$ puisse, dans les réductions suivantes, annuler un des exposants de x au second membre.

2. Appliquons à l'équation

$$dy + y^2\,dx = ax^m\,dx$$

la transformation suivante :

$$y = uv - l.$$

Nous trouverons, par la substitution,

$$v\,du + u\,dv + (u^2v^2 - 2\,l\,uv + l^2)\,dx = ax^m\,dx.$$

posons ensuite

$$u(dv - 2\,lv\,dx) = 0.$$

d'où

$$v = e^{2lx};$$

nous aurons l'équation simplifiée

$$du\,e^{2lx} - u^2\,e^{4lx}\,dx = ax^m\,dx - l^2\,dx;$$

posant enfin

$$e^{2lx}\,dx = dt,$$

on obtient, toutes simplifications faites, l'équation

$$du - u^2\,dt = \frac{a}{(2\,l)^{m+1}}\log(2\,lt)^m\,\frac{dt}{t} - \frac{l}{4}\,\frac{dt}{t^2},$$

intégrable dans tous les cas de l'équation de Riccati.

SUR LES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

I.

Euler nous a déjà donné plusieurs exemples du parti que l'on peut tirer de la représentation des nombres par des formes quadratiques à déterminants négatifs pour reconnaître s'ils sont premiers ou non. Je vais, à présent, montrer que, dans ces recherches, on peut aussi bien se servir de certaines formes à déterminants positifs, ce qui est nécessaire pour rendre cette méthode tout à fait générale et même avantageuse pour des nombres d'une grandeur considérable. En effet, quand on se borne seulement aux formes quadratiques à déterminants négatifs, les différents nombres exigent l'emploi de plusieurs différentes formes, et chacune d'elles demande des procédés particuliers pour trouver facilement la représentation du nombre donné. De plus, le nombre de ces formes propres à distinguer le cas d'un nombre premier de celui d'un nombre composé étant limité, on peut rencontrer des nombres qui ne peuvent prendre aucune de ces formes. On écarterait toutes ces difficultés si l'on pouvait considérer les nombres d'après leur représentation par des formes quadratiques à déterminants positifs; car alors, pour embrasser tous les cas possibles, il suffira d'un petit nombre de formes convenablement choisies, telles que, par exemple,

$$x^2 + y^2, \quad x^2 + 2y^2, \quad x^2 - 2y^2,$$

ou

$$x^2 - y^2, \quad x^2 + 3y^2, \quad 3y^2 - x^2; \quad \text{etc.}$$

D'ailleurs il ne sera pas difficile, en traitant chacune d'elles, de construire des tables qui faciliteront considérablement ces recherches.

La totalité des représentations du nombre N par la forme $Ax^2 + By^2$

tant limitée, on distingue le cas de N premier de celui où il est composé, en cherchant le nombre de résolutions de l'équation

$$Ax^2 + By^2 = N.$$

Nous verrons que la même chose a lieu par rapport à l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

si parmi ses solutions, qui sont en nombre infini, on ne compte que celles où x et y ne surpassent pas certaines limites, ce qui revient à ne compter que le nombre de certains groupes que présentent toutes les solutions possibles de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N.$$

II.

Soient α, β les plus petites valeurs de x, y qui, étant au-dessus de zéro, vérifient l'équation

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

et a, b des nombres positifs qui vérifient celle-ci,

$$x^2 - Dy^2 = \pm N.$$

Par la multiplication des équations

$$\alpha^2 - D\beta^2 = 1, \quad a^2 - Db^2 = \pm N$$

nous trouvons

$$(a\alpha - b\beta D)^2 - D(a\beta - b\alpha)^2 = \pm N,$$

ce qui prouve que les nombres

$$x = \pm(a\alpha - b\beta D), \quad y = \pm(a\beta - b\alpha)$$

vérifient aussi l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N.$$

De cette manière, on pourra toujours passer d'une solution de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

à une autre, et, par conséquent, trouver plusieurs valeurs de x et de y qui la vérifient. Examinons maintenant dans quel cas les nombres

positifs x, y, donnés par les formules

$$(1) \qquad x = \pm(a\alpha - b\beta D), \quad y = \pm(a\beta - b\alpha),$$

seront plus petits que les nombres a et b dont on est parti. Dans ces recherches, il faut faire attention aux signes $\pm$ qu'on doit prendre dans les formules (1) pour rendre x, y positifs, et pour cela nous traiterons séparément deux cas,

$$x^2 - Dy^2 = N, \quad x^2 - Dy^2 = -N.$$

Dans le premier cas, nous aurons

$$a^2 - Db^2 = N,$$

ce qui donne

$$a = \sqrt{Db^2 + N};$$

de plus, d'après l'équation

$$\alpha^2 - D\beta^2 = 1,$$

on trouve

$$\alpha = \sqrt{D\beta^2 + 1}.$$

En mettant ces valeurs de a et α dans l'équation

$$x = \pm(a\alpha - b\beta D),$$

on obtient

$$x = \pm(\sqrt{Db^2 + N} \cdot \sqrt{D\beta^2 + 1} - b\beta D).$$

d'où il est clair que x sera positif quand on prendra la formule $\pm(a\alpha - b\beta D)$ avec le signe $+$. Mais, pour que cette valeur de $x = a\alpha - b\beta D$ soit plus petite que a, et, par conséquent, y plus petit que b, nous trouvons cette condition

$$a\alpha - b\beta D < a.$$

Cette inégalité donne

$$\frac{b\beta D}{a} > \alpha - 1, \quad \frac{b^2\beta^2 D^2}{a^2} > (\alpha - 1)^2,$$

et, en y mettant les valeurs de b et β tirées des équations

$$a^2 - Db^2 = N, \quad \alpha^2 - D\beta^2 = 1,$$

nous trouverons

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{a^2 - N}{a^2} > (\alpha - 1)^2,$$

et, par conséquent,

$$a > \sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2}}.$$

Donc les nouvelles valeurs de x et y seront toujours plus petites que celles dont on part si la valeur de x surpasse $\sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2}}$; par conséquent, en tirant à l'aide des formules (1) successivement d'une solution de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = N$$

une autre, on parviendra nécessairement à de telles valeurs de x et y que la première ne surpasse pas $\sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2}}$. Quant à la limite de la valeur de y, nous la trouvons égale à $\sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2D}}$; car, pour

$$x = \sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2}},$$

l'équation

$$x^2 - Dy^2 = N$$

donne

$$y = \sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2D}}.$$

De cette manière se trouve établi le théorème suivant :

Théorème. *Si l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

est possible, on trouvera dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2D}}$$

les valeurs entières de x et y qui la vérifient, $x = \alpha$ étant la plus petite solution, supérieure à l'unité, de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

En passant au cas de

$$x^2 - Dy^2 = -N,$$

nous remarquons que, d'après les équations

$$a^2 - Db^2 = -N, \quad \alpha^2 - D\beta^2 = 1,$$

on aura

$$a = \sqrt{Db^2 - N}, \quad \alpha = \sqrt{D\beta^2 + 1}.$$

et, par conséquent, la valeur de

$$y = \pm(a\beta - b\alpha)$$

pourra être mise sous cette forme,

$$y = \pm(\beta\sqrt{Db^2 + N} - b\sqrt{D\beta^2 + 1}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = \pm\frac{\beta^2(Db^2 - N) - b^2(D\beta^2 + 1)}{\beta\sqrt{Db^2 - N} + b\sqrt{D\beta^2 + 1}} = \pm\frac{-\beta^2 N - b^2}{\beta\sqrt{Db^2 - N} + b\sqrt{D\beta^2 + 1}}.$$

De là nous concluons que y est positif quand on prend la formule $\pm(a\beta - b\alpha)$ avec le signe $-$, et que, par conséquent, pour rendre y inférieur à b, nous devons vérifier cette condition

$$-(a\beta - b\alpha) < b.$$

Cette inégalité donne

$$\alpha - 1 < \frac{a\beta}{b}, \quad (\alpha - 1)^2 < \frac{a^2\beta^2}{b^2},$$

et, en y mettant les valeurs de a^2 et β^2 d'après les équations

$$a^2 - Db^2 = -N, \quad \alpha^2 - D\beta^2 = 1,$$

nous trouvons

$$(\alpha - 1)^2 < \frac{(Db^2 - N)(\alpha^2 - 1)}{Db^2},$$

ce qui donne définitivement

$$b > \sqrt{\frac{(\alpha + 1)N}{2D}}.$$

Donc, toutes les fois que, dans la solution connue de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = -N,$$

la valeur de y surpasse $\sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2D}}$, on pourra en tirer, à l'aide des formules (1), une solution plus simple, et, par conséquent, on par-

viendra nécessairement à une solution telle que y ne surpassera pas $\sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2D}}$; cela suppose, d'après l'équation

$$x^2 - Dy^2 = -N,$$

que x ne dépassera pas la limite $\sqrt{\frac{(\alpha-1)N}{2}}$. De cette manière nous parvenons à ce théorème :

THÉORÈME. *Si l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = -N$$

est possible, on trouvera dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha-1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha+1)N}{2D}},$$

des valeurs entières de x et y qui la vérifient, $x = \alpha$ étant la plus petite solution, supérieure à l'unité, de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

III.

Les limites entre lesquelles, d'après les théorèmes qui viennent d'être démontrés, on est sûr de trouver des nombres x et y qui vérifient l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

quand elle est possible, jouissent de cette propriété remarquable :

Si $x = a$, $y = b$, $x = a_1$, $y = b_1$ sont deux systèmes de valeurs de x et y qui ne surpassent pas les limites trouvées plus haut et vérifient l'une des équations

$$x^2 - Dy^2 = N, \quad x^2 - Dy^2 = -N,$$

les nombres $ab_1 + a_1b$, $ab_1 - a_1b$ ne seront pas divisibles par N, tandis que leur produit $(ab_1 + a_1b)(ab_1 - a_1b)$ sera un multiple de N.

Pour établir cette propriété, observons d'abord que le produit des

deux équations

$$a^2 - Db^2 = \pm N, \quad a_1^2 - Db_1^2 = \pm N,$$

peut être mis sous la forme

$$(aa_1 \pm Dbb_1)^2 - D(ab_1 \pm a_1 b)^2 = N^2.$$

Cela posé, si nous admettons que $ab_1 \pm a_1 b$ pris avec l'un des signes + ou — soit divisible par N, le nombre $aa_1 \pm Dbb_1$ pris avec le même signe devra nécessairement, d'après l'équation précédente, être également divisible par N; on aurait donc, dans cette hypothèse,

$$\left(\frac{aa_1 \pm Dbb_1}{N}\right)^2 - D\left(\frac{ab_1 \pm a_1 b}{N}\right)^2 = 1,$$

$\frac{aa_1 \pm Dbb_1}{N}$, $\frac{ab_1 \pm a_1 b}{N}$ étant des nombres entiers. Mais, comme nous supposons que α est la plus petite valeur de x, autre que l'unité, satisfaisant à l'équation

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

la formule précédente se trouvera être impossible si l'on établit l'inégalité

$$\left(\frac{aa_1 \pm Dbb_1}{N}\right)^2 < \alpha^2.$$

Or nous allons démontrer que ceci a toujours lieu quand on prend pour a et a_1 des nombres qui ne surpassent pas $\sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}$, et pour b, b_1 des valeurs non au-dessus de $\sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}}$. (Les signes supérieurs se rapportent au cas de $x^2 - Dy^2 = N$, et les signes inférieurs à celui de $x^2 - Dy^2 = -N$.) Pour prouver notre assertion, nous remarquerons que, a et a_1 étant compris entre les limites o et $\sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}$, b et b_1 entre o et $\sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}}$, la valeur de $\left(\frac{aa_1 \pm Dbb_1}{N}\right)^2$ ne pourra surpasser celle qu'on trouverait en admettant le signe + dans la formule, et en y supposant de plus

$$a = a_1 = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad b = b_1 = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}}$$

Or, comme dans cette hypothèse la valeur de $\left(\frac{aa_1 \pm Dbb_1}{N}\right)^2$ se réduit à α^2, nous en concluons que, dans les limites données plus haut, le *maximum* de $\left(\frac{aa_1 \pm Dbb_1}{N}\right)^2$ est α^2, et que ce *maximum* n'a lieu que pour $a = a_1$, $b = b_1$. Donc, dans le cas que nous examinons, où a et b sont différents de a_1, b_1, on aura nécessairement

$$\left(\frac{aa_1 \pm Dbb_1}{N}\right)^2 < \alpha^2,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Nous venons donc d'établir qu'aucun des deux nombres $ab_1 + a_1 b$, $ab_1 - a_1 b$ n'est divisible par N. Quant à leur produit

$$(ab_1 + a_1 b)(ab_1 - a_1 b) = a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2,$$

il est évidemment divisible par N; en effet, en substituant dans la formule $a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2$ les valeurs de a^2, a_1^2 tirées des équations

$$a^2 - Db^2 = \pm N, \quad a_1^2 - Db_1^2 = \pm N,$$

nous trouvons de suite

$$a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2 = \pm (b_1^2 - b^2) N.$$

Donc, si a, a_1, b, b_1 sont des valeurs entières de x et de y comprises dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{\alpha \pm 1}{2} N}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{\alpha \pm 1}{2D} N}$$

et qui vérifient l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

on trouvera nécessairement deux diviseurs de N en cherchant les facteurs communs à N et aux nombres $ab_1 + a_1 b$, $ab_1 - a_1 b$. De là nous tirons ce théorème :

THÉORÈME. *Si l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{\alpha \pm 1}{2} N}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{\alpha \pm 1}{2D} N}$$

peut être vérifiée par deux systèmes différents de valeurs de x et y, le nombre N *est composé.*

Quant à α, ce nombre a ici la même signification que dans les théorèmes précédents.

IV.

D'après les théorèmes que nous venons de prouver, la représentation du nombre N par la formule $\pm(x^2 - Dy^2)$ nous conduit à reconnaître que N est un nombre composé dans les deux cas suivants :

1°. Si, N étant de la forme des diviseurs linéaires de $x^2 - Dy^2$ susceptibles d'être représentés par la forme $\pm(x^2 - Dy^2)$, on ne trouve pas dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}}.$$

des valeurs entières de x, y qui rendent l'expression $\pm(x^2 - Dy^2)$ égale à N; car alors, d'après l'un des deux premiers théorèmes, l'équation

$$\pm(x^2 - Dy^2) = N$$

sera impossible, et ceci n'aura lieu que pour N composé;

2°. Si, dans ces limites, on trouve deux représentations différentes du nombre N; d'après le dernier théorème, ceci suppose que N est composé.

Donc, le nombre N ne peut être premier que dans le cas où l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}},$$

n'a qu'une seule solution dans laquelle évidemment x doit être premier à y et à D. Mais toutes les fois que ceci a lieu, peut-on en conclure que le nombre N soit nécessairement premier?

En examinant sous ce rapport les formes

$$\pm(x^2 - Dy^2),$$

nous remarquons qu'elles se divisent en deux espèces. Les unes, dans les limites énoncées et x étant premier à y et à D, ne donnent une seule représentation de N que dans le cas où ce nombre est premier; telles sont, par exemple, les formes

$$\pm(x^2 - 2y^2), \quad \pm(x^2 - 3y^2), \quad \pm(x^2 - 5y^2), \quad \text{etc.}$$

Les autres, au contraire, donnent une seule représentation non-seulement pour des nombres premiers, mais aussi pour plusieurs nombres composés quand on prend les nombres x, y dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}},$$

x étant premier à y et à D. Par exemple, en cherchant la représentation du nombre composé 371 par la forme $x^2 - 37y^2$, nous trouvons que les limites de x et de y sont

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{73+1 \,.\, 371}{2}} \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(73-1).371}{2.73}};$$

car la solution la plus simple de l'équation

$$x^2 - 37y^2 = 1$$

est la suivante :

$$x = 73, \quad y = 12.$$

Or, dans ces limites, nous observons que l'équation

$$x^2 - 37y^2 = 371$$

ne peut être vérifiée qu'en prenant

$$x = 36, \quad y = 5.$$

Nous ne donnerons pas ici une méthode générale pour distinguer à laquelle des deux espèces appartient une formule donnée $\pm(x^2 - Dy^2)$, comme Euler l'a fait par rapport aux formes $Ax^2 + By^2$; nous nous bornerons quant à présent à assigner plusieurs formes de la première espèce, qu'on reconnaît très-aisément.

V.

Nous avons vu, dans le § II, que si l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

est possible, on trouvera au moins une solution dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}}.$$

Nous allons démontrer maintenant que, dans ces limites, l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

aura au moins deux solutions si, étant susceptible d'être vérifiée par

$$x = l, \quad y = m, \quad x = l', \quad y = m',$$

les nombres $lm' + l'm$, $lm' - l'm$ ne sont pas divisibles par N.

Pour parvenir à cette conclusion, nous remarquons d'abord qu'en général, si x, y, X, Y vérifient l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

et que les nombres $x\mathrm{Y} + y\mathrm{X}$, $x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}$ ne soient pas divisibles par N, la même chose aura lieu quand on aura remplacé x, y par les nombres x_1, y_1 tirés des équations

$$(2) \qquad x_1 = \pm(\alpha x - \beta y D), \quad y_1 = \pm(\beta x - \alpha y),$$

dont nous nous sommes servi dans le § II. En effet, nous avons prouvé dans ce paragraphe que les valeurs de x_1, y_1, déterminées par les formules (2), vérifieront l'équation

$$x_1^2 - Dy_1^2 = \pm N,$$

et comme

$$\mathrm{X}^2 - D\mathrm{Y}^2 = \pm N,$$

nous trouverons

$$(x_1^2 - Dy_1^2)(\mathrm{X}^2 - D\mathrm{Y}^2) = N^2,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$(x_1\mathrm{X} \pm y_1\mathrm{Y})^2 - D(x_1\mathrm{Y} \pm y_1\mathrm{X})^2 = N^2;$$

de là il est clair que si $x_1 Y \pm y_1 X$, pris avec l'un des deux signes $\pm$, était divisible par N, le nombre $x_1 X \pm D y_1 Y$, pris avec le même signe, serait également divisible par N. Mais cela ne peut avoir lieu; pour le faire voir, observons que $xY + yX$, $xY - yX$, d'après les formules (2), peuvent être mis sous la forme

$$\pm (x_1 Y \pm y_1 X)\alpha \pm \beta(x_1 X \pm y_1 YD).$$

Or, si les nombres $x_1 Y \pm y_1 X$, $x_1 X \pm y_1 YD$, pris avec l'un des deux signes $\pm$, étaient divisibles par N, il s'ensuivrait aussi qu'un des nombres $xY + yX$, $xY - yX$ serait également divisible par N, ce qui n'est pas. Donc aussi les nombres $x_1 Y + y_1 X$, $x_1 Y - y_1 X$ ne pourront pas être divisibles par N.

D'après cela, nous concluons que si les nombres $lm' + l'm$, $lm' - l'm$ ne sont pas divisibles par N, et que $x = a$, $y = b$ soit une solution de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \quad N$$

dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}},$$

qu'on trouve, d'après le § II, en partant de $x = l$, $y = m$, et en passant successivement d'une solution à une autre à l'aide des équations (2), les nombres $am' + bl'$ de même ne seront pas divisibles par N. De la même manière nous conclurons que si a_1, b_1 est une solution de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}},$$

qu'on trouvera en partant de $x = l'$, $y = m'$, on ne rendra pas les nombres $am' + bl'$, $am' - bl'$ divisibles par N, en remplaçant l', m' par a_1, b_1. Mais ceci suppose évidemment que les nombres a_1, b_1 ne sont pas respectivement égaux aux nombres a, b; car, autrement, $am' - bl'$ se réduisant à

$$ab - ba = 0,$$

deviendrait divisible par N. Donc, dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}},$$

on trouvera nécessairement deux solutions de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

si elle est susceptible d'être vérifiée par deux systèmes de valeurs

$$x = l, \quad y = m, \quad x = l', \quad y = m',$$

et que les nombres $lm' + l'm$, $lm' - l'm$ ne soient pas divisibles par N.

VI.

D'après ce que nous venons de prouver, nous allons montrer que toutes les formes $\pm(x^2 - Dy^2)$, dont les diviseurs quadratiques ne sont que de la forme $\lambda x^2 - \mu y^2$, peuvent servir pour examiner si un nombre donné est premier ou non.

Théorème. *Soient $x^2 - Dy^2$ une forme dont les diviseurs quadratiques ne sont que de la forme $\lambda x^2 - \mu y^2$, N un nombre premier par rapport à D et de la forme des diviseurs linéaires contenus dans une seule forme quadratique $\pm(x^2 - Dy^2)$. Le nombre N sera premier si, α étant la plus petite valeur de x supérieure à l'unité parmi les solutions de l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

on trouve, dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}},$$

une seule représentation du nombre N par la forme $\pm(x^2 - Dy^2)$, et que, dans cette représentation, x et y n'aient point de facteur commun. Dans tous les autres cas le nombre N sera composé.

Démonstration. Pour établir le théorème énoncé, nous allons faire voir que lorsque N est un nombre composé, l'un des trois cas suivants aura nécessairement lieu :

1°. On ne trouvera pas de représentation du nombre N par la forme

$\pm(x^2 - Dy^2)$ dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}}.$$

2°. On trouvera dans ces limites une représentation de N pour laquelle x, y ne seront pas premiers entre eux;

3°. On trouvera dans ces limites plusieurs représentations du nombre N.

Si parmi les facteurs du nombre N on trouve des nombres qui ne soient pas diviseurs de $x^2 - Dy^2$, l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

ne sera pas possible, à moins que ces facteurs ne divisent x^2 et y^2. Donc, dans ce cas, ou bien la représentation du nombre N par la forme $\pm(x^2 - Dy^2)$ sera impossible, ou bien dans la représentation du nombre N les nombres x et y ne seront pas premiers entre eux.

En passant au cas où tous les facteurs de N sont diviseurs de $x^2 - Dy^2$, supposons que

$$N = N_1 . N_2.$$

Tous les diviseurs quadratiques de $x^2 - Dy^2$ étant, par supposition, de la forme $\lambda x^2 - \mu y^2$, nous concluons que les nombres N_1, N_2 pourront être représentés ainsi :

$$(3) \qquad N_1 = \lambda_1 x_1^2 - \mu_1 y_1^2, \quad N_2 = \lambda_2 x_2^2 - \mu_2 y_2^2,$$

et comme leur produit N est de la forme $\pm(x^2 - Dy^2)$, on trouvera

$$\lambda_2 = \lambda_1, \quad \mu_2 = \mu_1$$

dans le cas de

$$N = x^2 - Dy^2.$$

et

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \mu_2 = -\mu_1$$

dans le cas de

$$N = -(x^2 - Dy^2).$$

Donc

$$N_1 N_2 = \pm(\lambda_1 x_1^2 - \mu_1 y_1^2)(\lambda_1 x_2^2 - \mu_1 y_2^2).$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$N_1 N_2 = \pm [(\lambda_1 x_1 x_2 \pm \mu_1 y_1 y_2)^2 - \lambda_1 \mu_1 (x_1 y_2 \pm y_1 x_2)^2].$$

D'après cette équation et en remarquant que

$$N_1 N_2 = N, \quad \lambda_1 \mu_1 = D,$$

nous concluons que l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

sera vérifiée par deux systèmes de valeurs de x, y,

$$(4) \qquad \begin{cases} X = \lambda_1 x_1 x_2 + \mu_1 y_1 y_2, & X_1 = \lambda_1 x_1 x_2 - \mu_1 y_1 y_2, \\ Y = x_1 y_2 + y_1 x_2, & Y_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2. \end{cases}$$

En cherchant, d'après ces formules, les valeurs de $XY_1 + YX_1$, $XY_1 - YX_1$, nous trouvons

$$\begin{aligned} XY_1 + YX_1 &= (\lambda_1 x_1 x_2 + \mu_1 y_1 y_2)(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ &\quad + (\lambda_1 x_1 x_2 - \mu_1 y_1 y_2)(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ &= 2 x_2 y_2 (\lambda_1 x_1^2 - \mu_1 y_1^2) = 2 x_2 y_2 N_1, \\ XY_1 - YX_1 &= (\lambda_1 x_1 x_2 + \mu_1 y_1 y_2)(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ &\quad - (\lambda_1 x_1 x_2 - \mu_1 y_1 y_2)(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ &= 2 x_1 y_1 (\lambda_1 x_2^2 - \mu_1 y_2^2) = \pm 2 x_1 y_1 N_2. \end{aligned}$$

D'où il est clair que si $x_1 y_1$ est premier par rapport à N_1, et $x_2 y_2$ est premier par rapport à N_2, les nombres $XY_1 + YX_1$, $XY_1 - YX_1$ ne seront pas divisibles par

$$N = N_1 N_2,$$

ce qui, d'après le § V, suppose deux solutions de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N,$$

dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1) N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1) N}{2 D}}.$$

Quant au cas où $x_1 y_1$ aurait un commun diviseur avec N_1, ou bien $x_2 y_2$ avec N_2, il n'est pas difficile de s'assurer que les solutions (4)

de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

ainsi que toutes les autres qu'on en pourrait tirer à l'aide des formules (2), contiendront des valeurs de x, y divisibles par un même nombre.

C'est ainsi que nous nous convainquons que, dans les suppositions énoncées plus haut, on ne trouvera jamais un nombre composé N qui puisse avoir, dans les limites

$$x = 0, \quad x = \sqrt{\frac{(2 \pm 1) N}{2}}, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{(2 \mp 1) N}{2D}},$$

une seule représentation par la forme $\pm (x^2 - Dy^2)$, pour des nombres x, y premiers entre eux. Donc ceci ne peut avoir lieu que pour N premier; dans le cas contraire, d'après ce que nous avons vu dans le § V, on conclura que N est composé.

VII.

C'est de cette manière qu'on pourra reconnaître la nature d'un nombre donné d'après sa représentation par la forme quadratique $x^2 - Dy^2$ ou $-(x^2 - Dy^2)$ si tous les diviseurs quadratiques de $x^2 - Dy^2$ sont de la forme $\lambda x^2 - \mu y^2$. Nous allons maintenant présenter une Table de ces formes les plus simples, avec les limites de x, y, déterminées par les formules

$$x = \sqrt{\frac{(2 \pm 1) N}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{(2 \mp 1) N}{2D}},$$

ainsi que des formes linéaires des nombres qui peuvent etre examinés au moyen de ces formes.

FORMES quadratiques de N	LIMITES DE x et y	FORMES LINÉAIRES DE N.
$x^2 - 2y^2$	$x = \sqrt{2N}$ $y = \sqrt{\frac{N}{2}}$	$N = 8n + 1, 7$
$-(x^2 - 2y^2)$	$x = \sqrt{N}$ $y = \sqrt{N}$	
$x^2 - 3y^2$	$x = \sqrt{\frac{3}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{N}{6}}$	$N = 12n + 1$
$-(x^2 - 3y^2)$	$x = \sqrt{\frac{1}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{6}N}$	$N = 12n + 11$
$x^2 - 5y^2$	$x = \sqrt{5N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{5}N}$	$N = 20n + 1, 9, 11, 19$
$-(x^2 - 5y^2)$	$x = \sqrt{4N}$, $y = \sqrt{N}$	
$x^2 - 6y^2$	$x = \sqrt{3N}$, $y = \sqrt{\frac{N}{3}}$	$N = 24n + 1, 19$
$-(x^2 - 6y^2)$	$x = \sqrt{2N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}N}$	$N = 24n + 5, 23$
$x^2 - 7y^2$	$x = \sqrt{\frac{9}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}N}$	$N = 28n + 1, 9, 25$
$-(x^2 - 7y^2)$	$x = \sqrt{\frac{7}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{9}{14}N}$	$N = 28n + 3, 19, 27$
$x^2 - 10y^2$	$x = \sqrt{10N}$, $y = \sqrt{\frac{9}{10}N}$	$N = 40n + 1, 9, 31, 39$
$-(x^2 - 10y^2)$	$x = \sqrt{9N}$, $y = \sqrt{N}$	
$x^2 - 11y^2$	$x = \sqrt{\frac{11}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{9}{22}N}$	$N = 44n + 1, 5, 9, 27$
$-(x^2 - 11y^2)$	$x = \sqrt{\frac{9}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}N}$	$N = 44n + 3, 19, 35, 39, 43$
$x^2 - 13y^2$	$x = \sqrt{325N}$, $y = \sqrt{\frac{324}{13}N}$	$N = 52n + \begin{cases} 1, 3, 9, 17, 23, 25, 27, 29, 35, \\ 43, 49, 51 \end{cases}$
$-(x^2 - 13y^2)$	$x = \sqrt{324N}$, $y = \sqrt{25N}$	
$x^2 - 14y^2$	$x = \sqrt{8N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}N}$	$N = 56n + 1, 9, 11, 25, 43, 51$
$-x^2 - 14y^2$	$x = \sqrt{7N}$ $y = \sqrt{\frac{N}{7}}$	$N = 56n + 5, 13, 31, 35, 47, 55$
$x^2 - 15y^2$	$x = \sqrt{\frac{5}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{10}N}$	$N = 60n + 1, 49$
$-x^2 - 15y^2$	$x = \sqrt{\frac{3}{2}N}$ $y = \sqrt{\frac{1}{6}N}$	$N = 60n + 11, 59$

FORMES QUADRATIQUES de N	LIMITES DE x y	FORMES LINÉAIRES DE N
[illegible]	$x = \sqrt{[illegible]}$, $y = \sqrt{\frac{16}{17}N}$ $x = \sqrt{16N}$, $y = \sqrt{N}$	$N = 8n + \begin{cases} 1, 9, 13, 15, 16, 21, 25, 33, 35, \\ 43, 47, 49, 53, 55, 59, 67 \end{cases}$
[illegible]	$x = \sqrt{\frac{17}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{160}{38}N}$ $x = \sqrt{\frac{160}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{17}{38}N}$	$N = 76n + 1, 5, 9, 17, 25, 45, 49, 61, 73$ $N = 76n + 3, 15, 27, 31, 51, 59, 67, 71, 75$
[illegible]	$x = \sqrt{28N}$, $y = \sqrt{\frac{2}{7}N}$ $x = \sqrt{7N}$, $y = \sqrt{\frac{4}{3}N}$	$N = 84n + 1, 5, 37, 43, 61, 79$ $N = 84n + 5, 17, 41, 47, 53, 83$
[illegible]	$x = \sqrt{70N}$, $y = \sqrt{\frac{4}{11}N}$ $x = \sqrt{95N}$, $y = \sqrt{\frac{2}{5}N}$	$N = 88n + 3, 9, 25, 27, 49, 59, 67, 75, 81$ $N = 88n + 7, 13, 21, 29, 39, 61, 63, 79, 85, 87$
[illegible]	$x = \sqrt{\frac{25}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{17}{2}N}$ $x = \sqrt{\frac{23}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{5}{46}N}$	$N = 92n + 1, 9, 13, 25, 29, 41, 49, 73, 77, 81, 85$ $N = 92n + 7, 11, 15, 19, 43, 51, 63, 67, 79, 83, 91$
[illegible]	$x = \sqrt{26N}$, $y = \sqrt{\frac{25}{26}N}$ $x = \sqrt{2N}$, $y = \sqrt{N}$	$N = 104n + \begin{cases} 1, 9, 17, 23, 25, 49, 55, 79, 81, \\ 87, 95, 103 \end{cases}$ $N = 104n + \begin{cases} 5, 11, 19, 21, 37, 45, 59, 67, 83, \\ 85, 93, 99 \end{cases}$
[illegible]	$x = \sqrt{\frac{109}{4}N}$, $y = \sqrt{\frac{109}{29}N}$ $x = \sqrt{\frac{109}{4}N}$, $y = \sqrt{\frac{109}{29}N}$	$N = 116n + \begin{cases} 1, 3, 7, 9, 13, 23, 25, 35, 45, \\ 49, 51, 53, 57, 59, 63, 65, 69, \\ 71, 81, 83, 91, 93, 103, 105, \\ 109, 111, 115 \end{cases}$
[illegible]	$x = \sqrt{N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{5}N}$ $x = \sqrt{5N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{5}N}$	$N = 120n + 1, 49, 121, 169$ $N = 120n + 29, 71, 101, 119$
[illegible]	$x = \sqrt{\frac{121}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{1500}{61}N}$ $x = \sqrt{\frac{121}{2}N}$, $y = \sqrt{\frac{61}{64}N}$	$N = 124n + \begin{cases} 1, 5, 9, 25, 35, 41, 43, 45, 49, \\ 59, 81, 97, 101, 109, 113, 121 \end{cases}$ $N = 124n + \begin{cases} 3, 11, 19, 23, 27, 33, 55, 75, 79, \\ 85, 91, 99, 115, 119, 123 \end{cases}$
[illegible]	$x = \sqrt{13N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{3}N}$ $x = \sqrt{11N}$, $y = \sqrt{\frac{1}{11}N}$	$N = 132n + \begin{cases} 1, 25, 31, 37, 49, 67, 91, 97, \\ 103, 115 \end{cases}$ $N = 132n + \begin{cases} 17, 23, 35, 41, 65, 83, 95, 101, \\ 107, 131 \end{cases}$

VIII.

D'après ce que nous venons de trouver, on voit qu'il y a plusieurs formes à déterminants positifs dont on peut se servir pour examiner si un nombre donné est premier ou non. Quant aux limites de x, y, dans lesquelles on doit chercher la représentation du nombre examiné par la forme $\pm(x^2 - Dy^2)$, elles ne sont pas toujours plus étendues que celles qu'on trouve par rapport à la forme $x^2 + Dy^2$. Ainsi, d'après la Table précédente, on voit qu'en cherchant la représentation du nombre N par la forme $3y^2 - x^2$, on ne doit pas aller au delà de $y = \sqrt{\frac{N}{2}}$, et, comme y ne peut pas être évidemment plus petit que $\sqrt{\frac{N}{3}}$, on cherchera la valeur de y entre les limites $\sqrt{\frac{N}{3}}$, $\sqrt{\frac{N}{2}}$. De la même manière nous apercevons que, pour trouver la représentation du nombre N par la forme $x^2 - 3y^2$, on cherchera y entre les limites $\sqrt{N}$, $\sqrt{\frac{3}{2}N}$; pour la forme $x^2 - 2y^2$, ces limites sont $\sqrt{N}$, $\sqrt{2N}$, etc.

Nous allons maintenant montrer par un exemple qu'à l'aide de la forme $\pm(x^2 - Dy^2)$, convenablement choisie, il n'est pas difficile d'examiner si un nombre donné est premier ou non, même quand ce nombre est considérable. Nous choisissons le nombre 8520191; Legendre (*voyez* sa *Théorie des Nombres*, tome II, page 152), en cherchant deux nombres A et B, tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs de l'autre, celui-ci non compris, a trouvé que

$$A = 2^8 . 520191, \quad B = 2^8 . 257 . 33023$$

vérifieront cette condition si le nombre 8520191 est premier. Mais jusqu'à présent on ne sait si ce nombre est premier ou non.

En remarquant que le nombre 8520191 est de la forme $12n + 11$, et que tous les nombres premiers de cette forme peuvent être représentés par $3y^2 - x^2$, nous allons chercher la représentation de 8520191 par la formule $3y^2 - x^2$. D'après le procédé exposé plus haut, nous

allons chercher la valeur y entre les limites

$$\sqrt{\frac{8520191}{3}} \quad \sqrt{\frac{8520191}{3^2}}.$$

c'est-à-dire entre les limites

$$1685, \quad 2065.$$

Pour que la forme $3y^2 - x^2$ représente un nombre impair, on prendra x impair et y pair, ou bien x pair et y impair. En faisant, dans le premier cas,

$$x = 2n + 1, \quad y = 2n,$$

nous trouvons que $3y^2 - x^2$ se réduit à

$$12n_1 - 8\frac{n_1(n_1+1)}{2} - 1,$$

ce qui ne peut être égal à 8520191, qui est de la forme $8m - 1$ si n_1 est impair. Donc

$$n_1 = 2l.$$

et, par conséquent, on aura, dans le premier cas,

$$y = 4l.$$

En passant au cas de x pair et y impair, faisons

$$x = 2n, \quad y = 2n_1 + 1.$$

Pour ces valeurs de x, y la forme $3y^2 - x^2$ devient

$$3 + 24\frac{n_1(n_1+1)}{2} - 4n^2,$$

et, en égalant cette quantité à 8520191, nous trouvons l'équation

$$3 + 24\frac{n_1(n_1+1)}{2} - 4n^2 = 8520191.$$

Or, comme cette équation se réduit à

$$6\frac{n_1(n_1+1)}{2} - n^2 = 2130047,$$

nous en concluons que n est impair.

Faisant donc

$$n = 2m + 1,$$

l'équation précédente devient

$$6\frac{n_1(n_1+1)}{2} - 8\frac{m(m+1)}{2} - 1 = 2130047,$$

et, par conséquent,

$$3\frac{n_1(n_1+1)}{2} - 4\frac{m(m+1)}{2} = 1060024,$$

ce qui suppose la divisibilité du nombre $\frac{n_1(n_1+1)}{2}$ par 4. Mais, pour que $\frac{n_1(n_1+1)}{2}$ soit divisible par 4, un des deux nombres n_1, $n_1 + 1$ doit être multiple de 8. Donc on aura

$$\text{ou} \quad n_1 = 8l' \quad \text{ou} \quad n_1 = 8l - 1.$$

En prenant la première valeur de n_1, nous trouvons

$$y = 16l' + 1,$$

et la seconde donne

$$y = 16l'' - 1.$$

Ainsi y ne peut être que de l'une de ces formes :

$$y = 4l, \quad y = 16l' + 1, \quad y = 16l' - 1.$$

De même, il n'est pas difficile de trouver les nombres auxquels y peut être congru suivant différents modules, et ensuite, au moyen de ces nombres, de trouver toutes les formes possibles de l, l', l''. Ainsi nous trouvons que pour

$$N = 5m + 1 = 7m' + 1 = 10m'' + 9 = 13m''' + 4 = 17m^{iv} + 12,$$

ce qui est justement le cas de

$$N = 8520191,$$

l'équation

$$3y^2 - x^2 = N$$

suppose

$$y \equiv 0,\ \pm 2 \pmod{5},$$

$$y \equiv \pm 1,\ \pm 2 \pmod{7},$$

$$y \equiv \pm 1,\ \pm 2,\ 5 \pmod{11},$$

$$y \equiv 0,\ \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 6 \pmod{13},$$

$$y \equiv \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 7 \pmod{17}$$

De là il est facile de conclure que les nombres l, l', l'', liés à y par les équations

$$y = 4l,\quad y = 16l' + 1,\quad y = 16l'' - 1$$

doivent avoir les formes :

$l = 5n + 0, 2, 3$	$l' = 5n + 1, 2, 4$	$l'' = 5n + 1, 2, 4$
$l = 7n + 0, 3, 4, 5$	$l' = 7n + 0, 2, 4, 6$	$l'' = 7n + 0, 1, 3,$
$l = 11n + 0, 4, 5, 6, 7, 8$	$l' = 11n + 0, 1, 3, 4, 6, 9$	$l'' = 11n + 0, 2, 5, 7, 8, 9$
$l = 13n + \begin{cases} 0, 3, 4, 7, 8, 9, \\ 10 \end{cases}$	$l' = 13n + \begin{cases} 0, 2, 3, 4, 5, \\ 6, 8 \end{cases}$	$l'' = 13n + \begin{cases} 0, 5, 7, 8, 9, 10, \\ 11 \end{cases}$
$l = 17n + \begin{cases} 1, 4, 5, 6, 8, 9, \\ 11, 12, 13, 16 \end{cases}$	$l' = 17n + \begin{cases} 0, 2, 3, 4, 5, 8, \\ 11, 14, 15, 16 \end{cases}$	$l'' = 17n + \begin{cases} 0, 1, 2, 3, 6, 7, \\ 12, 13, 14, 15 \end{cases}$

D'après ces formes de l, l', l'', il est très-facile de trouver toutes les solutions de l'équation

$$3y^2 - x^2 = 85.20191$$

dans les limites

$$y > 1685,\quad y < 2065.$$

Dans le cas de

$$y = 4l,$$

nous trouvons que l doit être compris dans les limites 421 et 516. Si l'on prend, dans ces limites, tous les nombres de la forme

$$13n + 0, 3, 4, 5, 8, 9, 10,$$

et qu'on rejette, d'après l'équation

$$l = 5n + 0, 2, 3,$$

tous les nombres dont le dernier chiffre est 1, 4, 6, 9, on ne trouve,

que ces trente nombres :

425,	442,	455,	468,	485,	503,
432,	445,	458,	472,	490,	507,
433,	447,	460,	473,	497,	570,
437,	450,	463,	477,	498,	512,
438,	452,	465,	478,	502,	515.

D'après l'équation

$$l = 7n + 2, 3, 4, 5,$$

on supprimera de cette Table tous les nombres qui, divisés par 7, donnent des restes égaux à 0, 1, 4, 6, et l'on n'aura alors qu'à examiner dix-huit nombres parmi lesquels on reconnaîtra très-aisément ceux qui, divisés par 11, ne donnent pas les restes 3, 4, 5, 6, 7, 8; tous ces nombres, d'après l'équation

$$l = 11n + 3, 4, 5, 6, 7, 8,$$

doivent aussi être rejetés; alors il ne restera que les huit nombres suivants :

425,	437,	458,	478,
432,	445,	465,	502.

De plus, divisant ces nombres par 17, nous n'en trouverons que quatre :

437, 458, 465, 502,

qui s'accordent avec les formes

$$l = 17n + 1, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16;$$

d'ailleurs, comme ces nombres conduisent à des valeurs de y qui ne vérifient pas l'équation

$$3y^2 - x^2 = 8520191,$$

nous en concluons que, dans les limites énoncées plus haut, cette équation n'a point de solution pour laquelle y serait de la forme $4l$.

En passant au cas de

$$y = 16l' + 1,$$

nous trouvons que les limites de l' sont 105 et 129, et que, dans ces limites, les nombres de la forme

$$13n + 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8$$

qui, s'accordant avec les suivantes :

$$l' = 5n + 1,\ 2,\ 4,$$

se terminent par 1, 2, 4, 6, 7, 9, sont

$$106,\quad 109,\quad 117,\quad 121,$$
$$107,\quad 112,\quad 119,\quad 122$$

En rejetant de là, d'après l'équation

$$l' = 7n + 0,\ 2,\ 4,\ 6,$$

tous les nombres qui, divisés par 7, donnent des restes différents de 0, 2, 4, 6, et, de plus, tous les nombres qui ne sont pas de l'une des formes

$$11n + 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,$$

il ne reste que les deux suivants :

$$119,\quad 121.$$

En cherchant, d'après ces valeurs de l', celles de

$$y = 16l' + 1$$

en substituant ces valeurs dans l'équation

$$3y^2 - x^2 = 8520191,$$

nous trouvons que la seconde donne

$$y = 1957,$$

qui vérifie l'équation

$$3y^2 - x^2 = 8520191,$$

en prenant

$$x = 1654.$$

Quant au dernier cas, c'est-à-dire celui de

$$y = 16l'' - 1,$$

nous trouvons 105 et 129 pour limites de l' ; dans ces limites, d'après les équations

$$l' = 13n + 0, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$$

$$l'' = 5n + 1, 3, 4,$$

nous aurons les nombres suivants :

$$109, \quad 113, \quad 123, \quad 126,$$

$$111, \quad 114, \quad 124, \quad 128,$$

dont il ne restera qu'un seul,

$$126,$$

quand on aura rejeté tous les nombres qui ne s'accordent pas avec les formes

$$l'' = 7n + 0, 1, 3, 5. \quad l'' = 11n + 0, 2, 5, 7, 8, 10.$$

et comme le nombre 126 est de la forme

$$17n + 7,$$

et, par conséquent, ne s'accorde pas avec les formules

$$l' = 17n + 0, 1, 2, 3, 6, 9, 12, 13, 14, 15.$$

nous concluons que ce nombre doit aussi être supprimé.

Ainsi nous ne trouvons qu'une seule représentation du nombre 8520191 par la forme $3y^2 - x^2$, en prenant y non supérieur à $\sqrt{\frac{8520191}{2}}$, et comme, dans cette représentation, les valeurs de x et y, nommément 1654 et 1937, n'ont point de commun diviseur, nous en concluons avec certitude que 8520191 est un nombre premier.

La méthode qui nous a servi à l'examen du nombre 8520191 à l'aide de la forme $3y^2 - x^2$ peut être étendue à tous les nombres, en faisant usage de certaines formes quadratiques. Ces recherches, comme on a pu le remarquer d'après l'exemple précédent, pourraient devenir très-expéditives, même pour des nombres considérables, si

l'on avait des Tables des solutions de la congruence

$$Ax^2 \pm By^2 \equiv C \pmod{p},$$

pour les valeurs les plus simples de p, telles que

$$p = 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29$$

Ces Tables seraient peu nombreuses si l'on se servait des formes à déterminants négatifs et en même temps de celles à déterminants positifs, car alors on n'aurait pas besoin de recourir à plusieurs formes différentes. Ainsi, par exemple, on pourra examiner tous les nombres au moyen de ces trois formes

$$x^2 - y^2,\quad x^2 + 2y^2,\quad x^2 - 2y^2.$$

La première servira pour examiner tous les nombres de la forme

$$8n + 1,\ 5;$$

la seconde pourra être employée dans le cas du nombre

$$8n + 3;$$

et enfin la dernière pour ceux qui sont de la forme

$$8n + 7.$$

On verrait de la même manière que tous les cas possibles pourraient également être traités au moyen de ces trois formes

$$x^2 - y^2,\quad x^2 - 3y^2,\quad 3y^2 - x^2.$$

Théorème relatif à une classe d'équations différentielles simultanées, analogue à un théorème employé par Lagrange dans la théorie des perturbations;

PAR M. É. BRASSINNE,
Professeur aux Écoles d'Artillerie.

1. On sait que la méthode générale des perturbations repose sur la théorie de la variation des constantes arbitraires fournies par les intégrations des équations du mouvement elliptique. La variation de chaque constante a pour expression une somme de termes contenant chacun la dérivée de la fonction perturbatrice par rapport à chacune des constantes, cette dérivée étant multipliée par un coefficient d'une forme assez compliquée, et que Lagrange a prouvé être indépendant du temps. Le coefficient du terme qui multiplie la dérivée de la fonction perturbatrice par rapport à la constante dont on cherche la variation est égal à zéro.

L'indépendance de temps, pour chaque coefficient, peut se déduire d'un théorème général de Mécanique que Lagrange démontre dans la *Mécanique analytique*, tome Ier, page 328; reprenons, en la modifiant un peu, la démonstration de Lagrange que nous étendrons ensuite à des équations différentielles d'un ordre supérieur au second.

2. Considérons les trois équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} d\cdot\dfrac{dz}{d\xi'} - \dfrac{dz}{d\xi}\,dt = 0, \\[2ex] d\cdot\dfrac{dz}{d\psi'} - \dfrac{dz}{d\psi}\,dt = 0, \\[2ex] d\cdot\dfrac{dz}{d\varphi'} - \dfrac{dz}{d\varphi}\,dt = 0. \end{cases}$$

Différentions ces trois équations par rapport à une caractéristique δ

relative à quelques-unes des constantes qui renferment les valeurs des variables ξ, ψ, φ exprimées en fonction du temps, et multiplions la première relation par $\Delta\xi$, la deuxième par $\Delta\psi$, la troisième par $\Delta\varphi$ (Δ est une caractéristique de différentiation relative à d'autres constantes que δ). En ajoutant, on aura pour résultat

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\xi\, d\cdot\dfrac{\delta z}{d\xi'} + \Delta\varphi\,\dfrac{d\cdot\delta z}{d\psi'} \quad \Delta\varphi\, d\cdot\dfrac{\delta z}{d\varphi'} \\ -\Delta\xi\,\delta\,\dfrac{dz}{d\xi} \quad \Delta\psi\,\delta\cdot\dfrac{dz}{d\psi} - \Delta\varphi\,\delta\cdot\dfrac{dz}{d\varphi} \end{array}\right\} dt = 0$$

Mais, en faisant passer dans les trois premiers termes $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ sous le signe de différentiation, il suffira de soustraire du premier membre

$$\Delta\xi'\cdot\frac{d\cdot\delta z}{d\xi'}\,dt + \Delta\psi'\cdot\frac{d\cdot\delta z}{d\psi'}\,dt + \Delta\varphi'\,\frac{d\cdot\delta z}{d\varphi'}\,dt;$$

cette partie soustractive, avec les trois derniers termes négatifs, donnera pour résultat

$$\Delta\delta z - \Delta\delta\xi\cdot\frac{d\cdot\delta z}{d\cdot\delta\xi} - \Delta\delta\xi'\cdot\frac{d\cdot\delta z}{d\cdot\delta\xi'} - \ldots,$$

en remarquant que δz est une fonction de ξ, ξ', $d\xi$, $d\xi'$, etc.

En exécutant sur les trois équations du groupe (1) des transformations analogues et intervertissant l'ordre des caractéristiques δ et Δ, on trouvera une partie soustractive

$$\delta\Delta z - \delta\Delta\xi\cdot\frac{d\cdot\Delta z}{d\cdot\Delta\xi} - \delta\Delta\xi'\cdot\frac{d\cdot\Delta z}{d\cdot\Delta\xi'} - \ldots,$$

identique à la précédente, puisque dans les coefficients différentiels de la fonction z il est indifférent d'écrire δ ou Δ. Nous arriverons par ces calculs aux deux formules

$$d\left(\frac{\delta\, d}{d\xi}\,\Delta\xi\right) + \ldots - \Delta\delta z - \Delta\delta\xi\cdot\frac{d\cdot\delta z}{d\xi} - \ldots = 0,$$

$$d\left(\frac{\Delta\, dz}{\delta\xi}\,\delta\xi\right) + \ldots - \delta\Delta z - \delta\Delta\xi\cdot\frac{d\cdot\Delta z}{d\cdot\Delta\xi} - \ldots = 0.$$

Leur différence donne la relation de Lagrange

$$(3)\qquad d\cdot\left(\frac{\delta.dz}{d\xi'}\Delta\xi - \frac{\Delta.dz}{d\xi'}\delta\xi + \ldots\right) = 0.$$

5. Pour étendre cette relation à des équations différentielles d'un ordre plus élevé, nous partirons d'une formule de calcul différentiel qu'il est aisé de démontrer. On sait que a et b désignant deux fonctions d'une même variable, la différentielle de l'ordre m du produit ab peut s'écrire ainsi

$$d^m(a.b) = d^m a.b + m d^{m-1} a.db + \ldots + a.d^m b.$$

Or cette formule bien connue peut encore prendre cette forme,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} d^m(a.b) &= d^m a.b + m d^{m-1}(a.db) \\ &- \frac{m(m-1)}{1.2} d^{m-2}(a.d^2 b) + \ldots \pm a.d^m b. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients sont ceux du binôme, et les termes, après le premier, sont alternativement positifs et négatifs. A l'exception des deux termes extrêmes, tous les autres sont des différentielles exactes.

Partant de la formule (4), considérons une fonction z de ξ, ψ, φ, ξ', ψ', φ', ξ'', ψ'', φ'' qui satisfasse pour les variables ξ, ψ et φ à des relations, telles que

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu\frac{1}{dt^2}d^2\cdot\frac{dz}{d\xi''} + \mu'\frac{1}{dt}d\cdot\frac{dz}{d\xi'} - \frac{dz}{d\xi} = 0, \\ &\mu\frac{1}{dt^2}d^2\cdot\frac{dz}{d\psi''} + \mu'\frac{1}{dt}d\cdot\frac{dz}{d\psi'} - \frac{dz}{d\psi} = 0, \\ &\mu\frac{1}{dt^2}d^2\cdot\frac{dz}{d\varphi''} + \mu'\frac{1}{dt}d\cdot\frac{dz}{d\varphi'} - \frac{dz}{d\varphi} = 0 \end{aligned}\right.$$

conformément à la notation du calcul des fonctions

$$\xi' = \frac{d\xi}{dt},\quad \xi'' = \frac{d\xi'}{dt},\quad \text{etc.};$$

μ et μ' sont égaux à $+1$ ou -1. Il est aisé de prouver que le système des trois équations (5) conduit à une relation analogue à celle de Lagrange. Pour le démontrer, on différentie les trois équations (5) par rapport à la caractéristique δ relative à quelques constantes, et

On multiplie la première équation de ce groupe par $\Delta\xi$, la deuxième par $\Delta\psi$, la troisième par $\Delta\varphi$. On ajoute ensuite les trois équations, après avoir fait passer $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ sous les signes de différentiation. On remarque ensuite que, d'après la formule (4),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{dt}d^2\cdot\left(\delta\cdot\frac{dz}{d\xi''}\cdot\Delta\xi\right) &= \frac{1}{dt^2}d^2\cdot\frac{\delta.dz}{d\xi''}\cdot\Delta\xi \\ &\quad - \frac{2}{dt}d\cdot\left(\delta\cdot\frac{dz}{d\xi'}\cdot\Delta\xi'\right) - \delta\cdot\frac{dz}{d\xi}\cdot\Delta\xi\,. \\ \frac{1}{dt}d\cdot\left(\delta\cdot\frac{dz}{d\xi'}\cdot\Delta\xi\right) &= \frac{1}{dt}d\cdot\frac{\delta.dz}{d\xi'}\cdot\Delta\xi + \delta\cdot\frac{dz}{d\xi'}\cdot\Delta\xi\,. \end{aligned}\right.$$

De là résulte qu'on peut ramener la somme des trois équations à une différentielle exacte, moins une quantité qui a pour expression

$$\delta\cdot\frac{dz}{d\xi}\Delta\xi' - \delta\cdot\frac{dz}{d\xi'}\Delta\xi' + \delta\cdot\frac{dz}{d\xi}\Delta\xi,$$

en supposant $\mu = -1$ et $\mu' = +1$, ce qu'on voit en prenant la valeur des deux premiers termes des équations (5), multipliés par $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ au moyen des relations (6). Comme on aurait pour les autres variables des termes soustractifs pareils, on voit que, en considérant δz comme une fonction de ξ, ξ', ξ'', $\delta\xi$, $\delta\xi'$, $\delta\xi''$, etc., le terme soustractif prendra la forme

$$(7)\quad -\Delta\delta z + \frac{d.\delta z}{d.\delta\xi}\Delta\delta\xi + \frac{d.\delta z}{d.\delta\xi'}\Delta\delta\xi' + \frac{d.\delta z}{d.\delta\xi''}\Delta\delta\xi'' + \ldots$$

Faisant la même suite d'opérations et changeant seulement l'ordre des caractéristiques, on arrivera, après avoir différentié les trois équations par rapport à la caractéristique Δ et avoir multiplié la première par $\delta\xi$, la deuxième par $\delta\psi$, la troisième par $\delta\varphi$, à une somme exprimable par une différentielle exacte, plus un terme de la forme

$$(8)\quad -\delta\Delta z + \frac{d.\Delta z}{d.\Delta\xi}\delta\Delta\xi + \frac{d.\Delta z}{d.\Delta\xi'}\delta\Delta\xi' + \ldots$$

expression équivalente à la somme (7); par suite, la soustraction conduira à une relation indépendante du temps, analogue à celle trouvée par Lagrange.

Considérons enfin l'équation

$$(9)\qquad \mu \frac{1}{dt^m} d^m \cdot \frac{dz}{d\xi^{(m)}} + \mu' \frac{1}{dt^{m-1}} d^{m-1} \cdot \frac{dz}{d\xi^{(m-1)}} + \ldots + \frac{dz}{d\xi} = 0,$$

et deux autres pareilles, relatives aux coordonnées ψ et φ. Nous différentierons les trois équations par rapport à δ, et nous multiplierons la première par $\Delta\xi$, la deuxième par $\Delta\psi$, la troisième par $\Delta\varphi$ dans cette somme, et, au moyen de la formule (4), nous éliminerons le terme $\frac{1}{dt^m} d^m \cdot \frac{\partial z}{d\xi^{(m)}} \cdot \Delta\xi$ en développant $\frac{1}{dt^m} d^m \cdot \left(\frac{\partial z}{d\xi^{(m)}} \cdot \Delta\xi\right)$, et posant

$$a = \frac{\partial z}{d\xi^{(m)}} \quad \text{et} \quad b = \Delta\xi.$$

Par ce procédé, et en donnant à μ, μ', μ'', etc., les valeurs ± 1, ∓ 1, etc., on parviendra à des conclusions analogues et à un théorème général pour les trois équations simultanées de la forme (9).

4. Nous terminerons ce travail par quelques observations relatives au théorème de Lagrange. Supposons que, pour le temps t, on ait

$$\xi = \alpha, \quad \psi = \beta, \quad \varphi = \gamma,$$
$$\frac{dz}{d\xi'} = \lambda, \quad \frac{dz}{d\psi'} = \mu, \quad \frac{dz}{d\varphi'} = \nu;$$

l'intégration des équations du second ordre

$$d \cdot \frac{dz}{d\xi'} - \frac{dz}{d\xi} dt = 0, \quad d \cdot \frac{dz}{d\psi'} - \frac{dz}{d\psi} dt = 0, \quad d \cdot \frac{dz}{d\varphi'} - \frac{dz}{d\varphi} dt = 0,$$

donnera des valeurs pour le temps t' de la forme suivante :

$$\xi = \alpha + \alpha'(t - t') + \alpha''(t - t')^2 + \ldots,$$
$$\psi = \beta + \beta'(t - t') + \beta''(t - t')^2 + \ldots,$$
$$\varphi = \gamma + \gamma'(t - t') + \ldots,$$
$$\frac{dz}{d\xi'} = \lambda + \lambda'(t - t') + \ldots = s,$$
$$\frac{dz}{d\psi'} = \mu + \mu'(t - t') + \ldots = u,$$
$$\frac{dz}{d\varphi'} = \nu + \nu'(t - t') + \ldots = v$$

Cela posé, la relation de Lagrange, appliquée à ces expressions, donne, en supposant δ relatif à la constante λ et Δ à la constante α,

$$d\cdot\left(\frac{ds}{d\lambda}\cdot\frac{d\xi}{d\alpha}-\frac{ds}{d\alpha}\cdot\frac{d\xi}{d\lambda}+\ldots\right)\delta\alpha\,\delta\lambda=0,$$

ce qui prouve que l'expression entre les parenthèses est indépendante de t, et, par suite, de t', à cause de la forme de ξ, ψ, φ, $\frac{dz}{d\xi}$, etc. Mais il est clair que α, β, γ, λ, μ, ν peuvent être considérées comme coordonnées ou fonctions de ces coordonnées au temps t', et ξ, ψ, φ, s, u, v comme constantes pour le temps t; on aurait donc aussi

$$d\cdot\left(\frac{d\lambda}{ds}\cdot\frac{d\alpha}{d\xi}-\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{d\lambda}{d\xi}+\ldots\right)\delta\xi\,\delta s=0,$$

et comme la quantité entre parenthèses est, dans ce cas, indépendante de t', elle est aussi indépendante de t. Si enfin on avait la relation

$$\alpha=\varphi(a),\quad \lambda=f(b),$$

a et b étant deux nouvelles constantes, et α, λ fonctions de ces constantes; comme on aurait

$$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{d\lambda}{db}\cdot\frac{db}{ds},\quad \frac{d\alpha}{d\xi}=\frac{d\alpha}{da}\cdot\frac{da}{d\xi},\quad \text{etc.},$$

il résulterait que la relation

$$\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\xi}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\xi}+\ldots\right)$$

serait indépendante du temps.

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION DES CORPS,

PAR M. POINSOT.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT DES CALCULS POUR LA DÉTERMINATION DU LIEU DU CORPS AU BOUT D'UN TEMPS DONNÉ.

1. Si, dans les trois équations différentielles (1), (2), (3) du chapitre précédent, on remet, au lieu des lettres A, B, C qui représentent les trois moments principaux d'inertie, les expressions $m\frac{R^2}{a^2}$, $m\frac{R^2}{b^2}$, $m\frac{R^2}{c^2}$ relatives à l'ellipsoïde central du corps; si l'on intègre les deux premières (1) et (2) et qu'on y mette les deux constantes F et G^2 sous la forme $m\frac{R^2}{k^2}$ et $m^2\frac{R^2}{h^2k^2}$, ce qui est permis, on aura les trois équations

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=\text{constante}=\frac{1}{k^2},$$

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=\text{constante}=\frac{1}{h^2k^2},$$

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=\frac{k^2(p^2+q^2+r^2)-h^2}{h^2k^2},$$

d'où la lettre m, qui répond à la masse du corps, et la lettre R, à la

grandeur de l'ellipsoïde *central*, auront entièrement disparu, comme cela doit être : car il est évident que les *moments d'inertie* du corps A, B, C, la *force vive* $I\theta^2$, le *couple* d'impulsion G sont des quantités homogènes qui peuvent toutes être mises sous cette même forme du produit mR^4 divisé par le carré d'une ligne ou le rectangle de deux autres.

2. Et maintenant, si l'on fait les lignes kp, kq, kr respectivement égales à x, y, z, il viendra, pour les équations du mouvement de rotation, les transformées suivantes :

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2},$$

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}=\frac{a^2-b^2}{h^2k^2},$$

où l'on suppose, pour abréger,

$$(4)\qquad u^2=x^2+y^2+z^2.$$

Dans ces équations, il est visible que x, y, z sont les coordonnées du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central dont les rayons principaux sont a, b, c; que la ligne constante h est la hauteur de ce pôle au-dessus du plan du couple d'impulsion; k, la ligne constante dont la fonction $1:k^2$ représente la *force vive* $I\theta^2$ du système : d'où résulte (à cause de $I\theta^2=G\theta\cos i$), que la grandeur du couple G se trouve ici représentée par $1:hk$.

I.

3. Cela posé, les équations finies (1), (2) et (4) donnent, comme on l'a déjà vu dans la seconde partie de ce Mémoire, et en employant les mêmes abréviations,

$$x^2=\frac{a^2c^2}{\xi}(u^2-\alpha^2),$$

$$y^2=\frac{b^2c^2}{\xi}(u^2-\beta^2),$$

$$z^2=\frac{c^2c^2}{\xi}(u^2-\gamma^2),$$

Ensuite, les équations (1) et (2) étant différentiées et combinées avec l'équation différentielle (3), donnent

$$x^2 = \frac{a\,c'}{k^2 . b'c} \cdot y^2 z^2,$$

$$y^2 = \frac{b\,c'}{k^2 . a'c} \cdot z^2 x^2,$$

$$z^2 = \frac{c\,c'}{k^2 . a\,b} \cdot x^2 y^2.$$

4. Si l'on ajoute ces trois dernières équations, et qu'on y mette, au lieu de x^2, y^2, z^2, leurs valeurs données par les trois précédentes, on trouvera d'abord

$$x^2 + y^2 + z^2 = s^2$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{-1}{k^2} \left\{ u^4 . \Sigma a^4 e'^2 - u^2 . \Sigma a^4 e'^2 (\xi^2 + \eta^2) + \Sigma a^4 e'^2 \xi^2 \eta^2 \right\};$$

et, réduisant le second membre, exactement de la même manière qu'on l'a fait (seconde partie, n° **63**), il viendra

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{k} \left[\begin{array}{l} u^4 - u^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + (\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 \\ \quad - (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) + 2 \dfrac{a\,b\,c}{k} \end{array} \right].$$

ou en employant, pour abréger, les mêmes lettres qu'au n° **61**; faisant de plus,

$$Q - B + 2C : k^2 = H,$$

et tirant la racine carrée de part et d'autre, on aura

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{k} \sqrt{u^4 - P u^2 + H}. \tag{S}$$

Telle est, en fonction du rayon vecteur u, l'expression très-simple de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ avec laquelle le pôle instantané décrit son orbe s à la surface de l'ellipsoïde central, et décrit en même temps la courbe σ sur le plan du couple d'impulsion, qui demeure fixe dans l'espace absolu.

5. Pour avoir cette vitesse $\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$ en fonction du temps t, il faut donc maintenant chercher l'expression de u en t; or c'est ce qu'on

peut obtenir par un calcul très-facile. Car, comme on a (à cause de $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$uu = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z},$$

si l'on met, au lieu de x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, leurs valeurs données plus haut, on trouvera

$$u\dot{u} = \frac{ee'e''}{\varepsilon} \cdot \frac{\Sigma a^4 e'^2}{k\varepsilon} \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)},$$

d'où l'on tire, à cause de $\Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6$, et de $ee'e'' = \varepsilon^3 \sqrt{-1}$, et en se servant des dénominations du n° **61**,

$$(U) \qquad u \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{k} \cdot \frac{\sqrt{u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R}}{u}.$$

Telle est, en fonction de u, l'expression de la vitesse avec laquelle le pôle instantané se rapproche ou s'éloigne alternativement du centre de l'ellipsoïde central, et oscille ainsi suivant le rayon vecteur u, dans la partie qui s'étend du *maximum* au *minimum* de ce rayon; partie qui est $\beta - \alpha$ quand h est $< b$, et $\beta - \gamma$ quand h est $> b$.

6. Si, entre cette équation (U) et la précédente (S), on élimine le temps t, ce qui se fait ici très-simplement en divisant, membre à membre, l'une par l'autre, on aura, en s et u, l'équation différentielle

$$\frac{ds}{du} = -\frac{u\sqrt{u^6 - Pu^4 + H}}{\sqrt{u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R}};$$

ce qui est exactement la même équation qu'on avait trouvée directement pour la polhodie (seconde partie, n° **63**). On pouvait donc se borner ici à calculer l'une des deux expressions $\frac{ds}{dt}$, $\frac{du}{dt}$; car, en la comparant à celle de $\frac{ds}{du}$ qui nous était déjà connue, on aurait trouvé l'autre : mais il est toujours bon de confirmer les résultats du calcul.

7. Quant à l'imaginaire $\sqrt{-1}$ que l'on voit dans les deux premières expressions, elle n'y est qu'en apparence; car les deux polynômes

$$u^6 - Pu^4 + H \quad \text{et} \quad u^6 - Pu^4 + Qu^2 - R$$

sont ici essentiellement *négatifs*, à cause du rayon vecteur u toujours plus petit que la ligne β, et toujours plus grand que chacune des deux autres α et γ.

II.

8. Maintenant, l'équation différentielle (U), qui ne renferme que les deux variables u et t, étant mise sous la forme

$$dt = \frac{h}{2} \cdot \frac{2u\,du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(\beta^2-u^2)(u^2-\gamma^2)}},$$

se ramène immédiatement aux quadratures.

On aura donc en intégrant, et déterminant la constante arbitraire de manière que le temps t commence quand le rayon vecteur u est à son *maximum* β,

$$t = f(u^2) - f(\beta^2),$$

f désignant ici une certaine fonction de u^2; et de là, par la fonction inverse que je désignerai par f_1, on tirera

$$u^2 = f_1[t + f(\beta^2)],$$

où il est évident que f_1 sera une fonction périodique du temps t.

Ainsi, quoique le temps t croisse à l'infini, la valeur de cette fonction ne peut s'étendre que depuis le *maximum* de u^2, qui est toujours β^2, jusqu'à son *minimum* qui est, ou γ^2, ou α^2 selon qu'on a $h >$ ou $< b$.

En désignant donc par τ le temps que le pôle I met à passer d'un sommet de son orbe s au sommet suivant, temps exprimé, dans le premier cas, par

$$\tau = f(\gamma^2) - f(\beta^2),$$

et dans le second, par

$$\tau = f(\alpha^2) - f(\beta^2),$$

si l'on demande la valeur du rayon u au bout d'un temps quelconque, on pourra commencer par ôter de ce temps donné tous les multiples de 4τ qui y seraient contenus, et conserver seulement le reste, qui ne

pourrait être que de la forme

$$t, \quad \text{ou} \quad t + \tau, \quad \text{ou} \quad t + 2\tau, \quad \text{ou} \quad t + 3\tau,$$

selon que le pôle I serait dans le premier, le deuxième, le troisième ou le quatrième quart de son orbe s.

9. Connaissant la valeur de u^2 en t, si on la suppose substituée à la place de u^2 dans l'équation

$$ds = \frac{dt}{j}\sqrt{Fu^2 - u^4 - H},$$

on aura par une nouvelle intégration, et en déterminant la constante arbitraire de manière que l'arc s commence avec le temps t,

$$s = \sigma = F(t) - F(0).$$

Équation où il faut observer qu'on doit mettre le temps donné t pris dans toute son étendue, et non pas diminué des multiples de 4τ qu'il pourrait contenir, comme il était permis de le faire dans l'expression précédente de u^2.

Ayant ainsi le rayon u et l'arc σ en fonction de t, on en pourra conclure la position du corps au bout d'un temps quelconque t, comme on l'a fait voir à la fin du chapitre précédent.

10. Mais ces intégrations ou quadratures ne peuvent se faire ni algébriquement, ni par des arcs de cercle ou des logarithmes; elles demandent essentiellement l'emploi des transcendantes elliptiques; de sorte que le lieu du corps au bout d'un temps quelconque donné ne peut, en général, se calculer que par la voie des séries, ou au moyen de certaines Tables qu'on aurait construites pour ces fonctions supérieures.

Dans certains cas particuliers, relatifs soit à la direction du couple d'impulsion, soit à l'espèce du corps, la difficulté s'abaisse, et tout se réduit aux règles ordinaires, comme nous le ferons voir un peu plus loin.

III.

Changement des variables s et u dans les formules qui précèdent.

11. Si, dans les expressions précédentes de $\frac{ds}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, on change s en σ, et u^2 en $v^2 + h^2$, ce qui donne $uu = vv$, on aura les formules nouvelles

$$\sigma^2 = \frac{1}{k^2}\left[(v^2 + h^2)^2 - P(v^2 + h^2) + H\right]$$

$$v^2 = \frac{1}{k^2 v^2}\left[(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2)^2 + Q(v^2 + h^2) - R\right],$$

où v est le rayon vecteur allant du centre de la courbe σ au pole instantané qui la décrit.

12. Or, en nommant φ l'angle que ce rayon v fait avec une droite quelconque fixe située dans le plan de cette courbe σ, on a évidemment

$$v^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{\sigma}^2 - \dot{v}^2.$$

Mettant au lieu de $\dot{\sigma}^2$ et $\dot{v}^2$ leurs valeurs ci-dessus, et multipliant tout par $k^2 v^2$, il vient

$$\begin{aligned} k^2 v^4 \dot{\varphi}^2 = &-\left[(v^2 + h^2)^2 - P(v^2 + h^2) + H\right] \\ &-\left[(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2)^2 + Q(v^2 + h^2) - R\right], \end{aligned}$$

ou bien, en développant les binômes, et ordonnant le second membre par rapport à v.

$$k^2 v^4 \dot{\varphi}^2 = \left[\begin{aligned} h^4 v^4 + (2h^4 - Ph^2 + Q - H)v^2 \\ + (h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R) \end{aligned}\right].$$

Maintenant, si dans le terme $(2h^4 - Ph^2 + Q - H)v^2$, on met au lieu de Ph^2 sa valeur $2Ah^2 - B$, et au lieu de $Q - H$ sa valeur $\frac{Bh^2 - 2C}{h^2}$, on trouvera l'équation

$$k^2 v^4 \dot{\varphi}^2 = h^2 v^4 + 2\frac{h^4 - Ah^2 + Bh^2 - C}{h^2} \cdot hv^2 + (h^6 - Ph^4 + Qh^2 - R).$$

et en posant, pour abréger, comme on l'a déjà fait (seconde partie, n° **61**),

$$h^6 - Ah^4 - Bh^2 - C, \quad \text{ou} \quad (h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2) = D,$$

$$h^8 - Ph^4 - Qh^2 - R, \quad \text{ou} \quad (h^2 - \alpha^2)(h^2 - \beta^2)(h^2 - \gamma^2) = \Delta,$$

et observant qu'on a, entre D et Δ, la relation

$$\Delta = \frac{D^2}{h^2},$$

on aura l'équation

$$k^2 v^2 \varphi^2 = h^2 v^4 - 2\frac{D}{h} \cdot hv^2 + \frac{D^2}{h^2},$$

où il est évident que le second membre est le carré parfait du binôme $hv^2 + \frac{D}{h}$.

13. Ainsi l'on a, en extrayant la racine carrée de part et d'autre,

$$kv^2\varphi = hv^2 + \frac{D}{h};$$

d'où, en dégageant φ et remettant pour D sa valeur

$$(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2),$$

on tire

$$\varphi \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{khv^2},$$

expression très-simple de la vitesse angulaire avec laquelle le pôle instantané de rotation tourne autour du centre de l'herpolhodie σ; cette vitesse, comme on le voit, est composée d'une partie constante, et d'une partie variable qui est réciproque au carré du rayon vecteur v, et, par conséquent, périodique comme ce rayon.

14. Si l'on divise cette expression de $\frac{d\varphi}{dt}$ par celle de $\frac{dv}{dt}$, donnée plus haut (n° **12**), on aura l'expression de $\frac{d\varphi}{dv}$ en fonction de v, c'est-à-dire l'équation différentielle de la courbe plane σ, entre son rayon vecteur v et l'angle φ que ce rayon décrit autour du centre de cette

courbe σ; cette équation sera donc

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{hv^2 + \sqrt{\Delta}}{v\sqrt{(v^2+h^2)^3 - P(v^2+h^2)^2 + Q(v^2+h^2) - R}},$$

ce qui s'accorde parfaitement avec l'équation polaire de l'herpolhodie telle qu'on l'a trouvée directement (seconde partie, n° **66**).

On peut remarquer que cette équation ne renferme que les quatre constantes a, b, c et h, dont les trois premières sont relatives à l'espèce du corps, et la quatrième h, à la position du couple d'impulsion. Et il est clair que la constante k n'y doit pas entrer, puisque la courbe décrite par le pôle instantané ne peut dépendre de la grandeur $1:hk$ du couple qui a frappé le corps, ni par conséquent de la constante k qui répond aux *forces vives*: la courbe est décrite plus ou moins vite, mais elle est toujours la même pour les mêmes données a, b, c et h.

15. On peut employer, si l'on veut, ces nouvelles variables v et φ, au lieu des précédentes, pour avoir la position du corps au bout d'un temps quelconque t. Car, en intégrant la première équation qui donne l'expression de $\frac{dv}{dt}$ en fonction de v, et faisant commencer le temps t avec le rayon vecteur

$$v = \sqrt{\beta^2 - h^2},$$

on aura, comme plus haut (n° **8**),

$$t = f(v^2 + h^2) - f(\beta^2),$$

ou

$$v^2 = f_1(t + f(\beta^2)) - h^2.$$

De cette valeur v^2 on conclut celles des trois coordonnées x, y, z du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central, puisque chacune d'elles x, y, z est donnée en u^2 (n° **3**), et, par conséquent, en $v^2 + h^2$: on a donc déjà la position de ce pôle sur l'ellipsoïde central.

Mettant ensuite cette valeur de v^2 en t dans la seconde équation qui donne $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction de v, et intégrant, en faisant commencer l'angle φ avec le temps t, on aura

$$\varphi = f(t) - f(0);$$

ce qui donnera la position du pôle instantané sur le plan fixe du couple d'impulsion : et de là on pourra conclure la position du corps dans l'espace absolu au bout du temps t.

Mais, quelques coordonnées qu'on emploie, l'intégration ramènera toujours, ce qui est ici fort naturel, à la théorie des fonctions *elliptiques* : théorie aujourd'hui très-connue, et à laquelle je renvoie le lecteur, pour ne pas m'écarter du principal objet de ce Mémoire. Je me bornerai donc à quelques exemples où les quadratures se font par les règles ordinaires.

Application des formules à quelques cas particuliers qui n'exigent pas l'emploi des transcendantes elliptiques.

I.

Cas particuliers relatifs à la position du couple d'impulsion.

16. Il est presque inutile de s'arrêter au cas particulier de $h = a$; car il n'y a, sur la surface de l'ellipsoïde central, qu'un seul point où le plan tangent puisse être à une distance $h = a$ du centre de cet ellipsoïde. On a donc alors $u = a$, et le corps tourne constamment, avec une vitesse angulaire $\theta = a : k$, autour de son axe majeur a, lequel se confond avec l'axe du couple d'impulsion et demeure immobile et dans le corps et dans l'espace absolu.

Il n'y a ici qu'une seule remarque à faire : c'est que le pôle instantané I étant immobile, il semble que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ de ce pôle autour de l'axe du couple devrait être nulle, aussi bien que sa vitesse absolue $\frac{d\sigma}{dt}$, et non pas égale à la quantité finie $\frac{a}{k}$ que donne l'expression générale de $\frac{d\varphi}{dt}$ quand on y fait $h = a$. Mais il faut observer que la vitesse angulaire d'un point autour d'un centre fixe est une quantité qui ne dépend pas de la distance de ce point au centre que l'on considère. Ainsi, quoique le rayon vecteur v du pôle I soit ici égal à zéro, et que ce pôle soit réellement immobile, on n'en peut pas conclure que sa vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ soit aussi égale à zéro : et

voilà pourquoi on la trouve égale à la quantité finie $a : k$. Et l'on peut bien voir d'ailleurs que cette valeur est la véritable; car, dans notre analyse, où la grandeur du couple d'impulsion est exprimée par $\frac{1}{hk}$, et le moment d'inertie du corps par $\frac{1}{a^2}$, il est clair que le quotient $\frac{a}{k}$ exprime la rotation θ, c'est-à-dire la vitesse angulaire d'un point quelconque de ce corps, et, par conséquent, celle du point particulier qui fait le pôle lui-même.

On peut dire exactement les mêmes choses dans le cas particulier de $h = c$, c'est-à-dire quand le plan du couple sera donné tangent au pôle *mineur* de l'ellipsoïde : il n'y a qu'à changer a en c.

Mais il n'en est pas de même dans le cas singulier de h égal à l'axe *moyen* b; car, outre le pôle moyen B, il y a sur l'ellipsoïde une infinité de points I où le plan tangent du couple peut être à la même distance $h = b$ du centre de cet ellipsoïde; et cette suite de points forme les deux ellipses singulières dont j'ai précédemment parlé (seconde partie, n° **68**), et sur l'une desquelles le pôle instantané I peut se mouvoir dans toute la suite du temps. C'est ce qu'il est bon de développer.

Solution dans le cas singulier de $h = b$.

17. Si l'on suppose $h = b$, on trouve d'abord ces réductions,

$$\alpha^2 = \gamma^2 = b^2;$$

et l'équation différentielle du n° **8** devient

$$\frac{2\,dt}{k} = \frac{2u\,du}{(u^2 - b^2)\sqrt{\beta^2 - u^2}},$$

laquelle s'intègre par logarithmes, et donne, en y faisant, pour abréger,

$$n^2 = \beta^2 - b^2,$$

l'équation

$$\frac{2\,nt}{k} = l.\frac{n + \sqrt{\beta^2 - u^2}}{n - \sqrt{\beta^2 - u^2}}$$

intégrale où l'on a déterminé la constante arbitraire par la supposition que le temps t commence quand le rayon vecteur $u = \beta$.

On a donc, en passant des logarithmes aux exponentielles, l'équation

$$e^{\frac{2nt}{k}} = \frac{n + \sqrt{\beta^2 - u^2}}{n - \sqrt{\beta^2 - u^2}};$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à u^2,

$$u^2 = b^2 + \frac{4n^2}{\left(e^{\frac{nt}{k}} + e^{-\frac{nt}{k}}\right)^2},$$

pour l'expression du rayon vecteur u en fonction du temps t.

Or chacune des coordonnées x, y, z du pôle instantané I étant elle-même exprimée en u^2, on en aura la valeur en t, et, par conséquent, on saura quelle est, sur la surface de l'ellipsoïde central, la position du pôle I au bout d'un temps quelconque t.

Pour avoir maintenant sa position sur le plan fixe du couple d'impulsion, au bout du même temps, on prendra, pour les deux coordonnées de ce point, le rayon vecteur v émané du centre de l'herpolhodie σ, avec l'angle φ que ce rayon fait avec une droite fixe dans le plan de cette courbe.

Or, à cause de $h = b$, on a

$$v^2 = u^2 - b^2,$$

et l'équation précédente donne sur-le-champ

$$v = \frac{2n}{e^{\frac{nt}{k}} + e^{-\frac{nt}{k}}}.$$

Ensuite, comme l'expression différentielle de $\frac{d\varphi}{dt}$ (n° **15**) se réduit ici (à cause de $h = b$) à l'expression très-simple $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{l}$, on aura tout de suite,

$$\varphi = \frac{b}{l} t,$$

en faisant commencer l'angle φ avec le temps t.

Connaissant donc, en fonction de t, les deux coordonnées polaires v et φ du pôle I sur le plan fixe du couple d'impulsion, et ayant déja les trois coordonnées x, y, z du même pôle sur la surface de l'ellipsoïde central, on en conclura, comme on l'a dit plus haut, la position que le corps doit occuper dans l'espace au bout du temps t, et la question sera ainsi complétement résolue.

18. De l'équation ci-dessus,

$$\varphi = \frac{b}{h} \cdot t,$$

si l'on tire t en φ, et qu'on le mette dans l'expression précédente de v, on a

$$v = \frac{2n}{e^{\frac{n\varphi}{b}} + e^{-\frac{n\varphi}{b}}};$$

pour l'équation polaire de la double spirale σ décrite par le pôle Fig. instantané dans l'espace absolu ; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait déjà trouvé dans la seconde partie de ce Mémoire.

II.

Cas particuliers relatifs à l'espèce du corps.

L'ellipsoïde central du corps peut être un *sphéroïde* elliptique allongé, ou aplati vers les pôles, ce qui convient à tous les corps de révolution, et à une infinité d'autres où le corps a deux de ses trois moments principaux d'inertie égaux entre eux : et enfin, l'ellipsoïde central peut être une sphère parfaite, ce qui convient, non-seulement aux corps sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres.

19. Soit d'abord le cas d'un sphéroïde allongé, c'est-à-dire le cas de

$$b = c;$$

on trouve alors

$$u^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \frac{(a^2 + b^2)h^2 - a^2 b^2}{h^2} = \textit{constante},$$

et, par conséquent,

$$v^2 = \beta^2 - h^2 = \frac{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}{h^2} = \textit{constante} :$$

d'où l'on voit d'abord que la vitesse angulaire θ du corps autour du rayon instantané u, et la vitesse angulaire $\theta \sin i$ autour du rayon v, sont toutes deux constantes, et respectivement égales à

$$\theta = \frac{\beta}{k}, \quad \theta \sin i = \frac{\sqrt{\beta^2 - h^2}}{k}.$$

On trouve ensuite, 1° que la polhodie s est un cercle décrit autour de l'axe du sphéroïde, d'un rayon ρ exprimé par

$$\rho = \frac{b^2 \cdot \sqrt{a^2 - h^2}}{h \cdot \sqrt{a^2 - b^2}},$$

et que la circonférence en est parcourue par le pôle instantané I avec une vitesse uniforme $\frac{ds}{dt}$ dont la valeur est

$$\frac{ds}{dt} = \frac{b^2}{hk} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - h^2} \cdot \sqrt{h^2 - b^2}}{h};$$

d'où résulte, en divisant $\frac{ds}{dt}$ par le rayon ρ, la valeur

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{h^2 - b^2}}{hk}$$

pour la vitesse angulaire de ce pôle autour de l'axe du sphéroïde.

2°. Que l'herpolhodie σ est un autre cercle d'un rayon

$$v = \sqrt{\beta^2 - h^2},$$

ou

$$v = \frac{\sqrt{a^2 - h^2} \cdot \sqrt{h^2 - b^2}}{h},$$

et que la circonférence de ce cercle décrit autour de l'axe fixe du couple d'impulsion, est parcourue avec une vitesse uniforme $\frac{d\sigma}{dt}$ parfaitement égale à la précédente $\frac{ds}{dt}$; d'où résulte, en divisant $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt}$ par le rayon v, le quotient $\frac{b^2}{hk}$ pour la vitesse angulaire du pôle I autour de l'axe fixe dans l'espace absolu : valeur qui s'accorde parfai-

tement, comme cela doit être, avec celle que donnerait l'expression générale de $\frac{d\varphi}{dt}$ si l'on y faisait $b = c$.

On voit donc qu'ici tout est uniforme et circulaire, et qu'il n'est pour ainsi dire besoin d'aucune intégration; car on a immédiatement

$$u = \beta, \quad v = \sqrt{\beta^2 - h^2}, \quad s = \sigma = \frac{b^2}{hk} \cdot \sqrt{\beta^2 - h^2} \cdot t. \quad \varphi = \frac{b^2}{hk} \cdot t.$$

en faisant commencer l'angle φ et les arcs s et σ avec le temps t.

20. Dans le cas particulier de $b = a$, ce qui répond au cas d'un sphéroïde central aplati vers les pôles, on trouverait, *mutatis mutandis*, des expressions toutes semblables aux précédentes.

21. Enfin, si l'on avait les axes extrêmes a et c égaux entre eux, ce qui entraînerait l'égalité des trois axes a, b, c et de la ligne h, il n'y aurait plus rien qui ne fût, pour ainsi dire, évident de soi-même. Le corps tournerait constamment autour d'un même diamètre $2a$ avec une vitesse angulaire $\theta = a : k$.

Il faut toutefois se rappeler que ce cas si particulier de

$$a = b = c = h$$

convient non-seulement aux corps homogènes qui sont sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres de constitution quelconque.

CHAPITRE II.

NOUVELLE IMAGE DE LA ROTATION DES CORPS.

22. Soient toujours O le centre du corps; OG l'axe du couple d'impulsion; OI l'axe instantané de la rotation θ, et i l'inclinaison mutuelle de ces deux axes. FIG. 21

On peut toujours supposer qu'à chaque instant dt la rotation θ soit décomposée en deux : l'une autour de l'axe OG du couple, et l'autre autour d'une droite OT perpendiculaire à OG dans le plan des deux axes OG et OI.

Or, par la première rotation $\theta \cos i$ autour de OG, cet axe OG reste

immobile dans le corps et dans l'espace; mais par la seconde $\theta \sin i$ autour de OT, il y a une certaine ligne OG′ du corps qui vient se placer sur OG dans l'espace : de sorte que OG, qui est réellement fixe dans l'espace, paraît décrire un angle GOG′ dans l'intérieur du corps. Or c'est le plan de cet angle infiniment petit, et dont la valeur est

$$\mathrm{GOG}' = \theta \sin i \,.\, dt,$$

qui forme l'élément de la surface conique tracée par l'axe OG du couple dans l'intérieur du corps.

23. La ligne OT, qui est perpendiculaire au plan de cet angle, est donc normale à la surface de ce cône. La suite des normales OT correspondantes à toutes les positions de la génératrice OG forme donc, dans l'intérieur du corps, une autre surface conique de même sommet normale à la première. Et il est évident que ces deux cônes que je représente, pour abréger, par (OG) et (OT), sont en quelque sorte *réciproques* l'un de l'autre : car les génératrices de l'un peuvent être regardées comme la suite des normales à la surface de l'autre.

24. On trouve aisément (seconde partie, n° **76**, corollaire VII) que la surface conique, décrite par l'axe OG du couple, a pour équation

$$(h^2 - a^2)\,x^2 + (h^2 - b^2)\,y^2 + (h^2 - c^2)\,z^2 = 0;$$

on peut donc en conclure que l'autre surface conique, décrite par OT toujours normale à la première, a pour équation

$$\frac{x^2}{h^2 - a^2} + \frac{y^2}{h^2 - b^2} + \frac{z^2}{h^2 - c^2} = 0.$$

25. On voit donc :

Que ces surfaces sont celles de deux cônes droits, à bases elliptiques, autour d'un axe commun qui est, ou le grand axe a, ou le petit axe c, de l'ellipsoïde central, selon qu'on a $h > b$, ou $h < b$;

Que, dans le cas singulier de $h = b$, le premier cône (OG), décrit par l'axe du couple, se réduit à l'un des deux plans représentés par l'équation

$$z = x\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{h^2 - c^2}}:$$

et le second cone (OT), à une simple droite OT perpendiculaire à ce plan :

Et qu'enfin, dans le cas où l'ellipsoïde central du corps est de révolution, les deux cônes sont des cônes droits à bases circulaires autour de l'axe du sphéroïde.

26. Voyons maintenant, à l'aide de ces images, comment s'exécute dans l'espace le mouvement d'un corps qui a reçu l'impulsion d'un couple dans une direction quelconque donnée.

Pour mieux fixer les idées et simplifier le discours, on peut considérer le plan MON du couple (qui reste fixe dans l'espace) comme étant le plan *horizontal*, et, par conséquent, l'axe OG de ce couple comme la *verticale*.

Cela posé, il est visible que, dans tout le cours du mouvement, la surface du premier cône (OG) doit passer par la verticale OG, et que la surface du second (OT) doit être en contact avec le plan horizontal MN. Car, la ligne OG étant toujours normale à la surface du cône (OT), et perpendiculaire au plan MN, ce plan horizontal MN ne peut être autre chose que le plan tangent à la surface. Donc, *pendant le mouvement du corps, le cône* (OT) *demeure perpétuellement en contact avec le plan fixe du couple appliqué.*

27. Actuellement, il est bien facile de se représenter le mouvement du corps par celui de ce cône intérieur (OT), qui est attaché au corps et l'entraîne avec soi dans l'espace absolu.

En effet, par la rotation $\theta \sin i$ autour de la génératrice OT, ce cône roule sur le plan horizontal MN et amène en contact, au bout d'un instant dt, une certaine génératrice infiniment voisine OT′ : par la seconde rotation $\theta \cos i$ autour de la verticale OG, cette génératrice OT′ glisse sur ce même plan en tournant d'un certain angle infiniment petit T′OT″. Ainsi, par les deux rotations composantes de θ, la génératrice OT, ou la ligne de contact du cône avec le plan MN a décrit sur ce plan, au bout d'un instant dt, un angle TOT″ composé des deux angles TOT′, T′OT″ dont on vient de parler. FIG.

Pour se représenter le mouvement du corps, il faut donc concevoir qu'à chaque instant dt, on fait rouler le cône (OT) sur le plan

fixe MN, par l'angle

$$TOT' = d\omega,$$

dû à la rotation $\theta \sin i$ autour de la ligne de contact OT; et, ensuite, qu'on le fait glisser, sur ce même plan, par l'angle

$$T'OT'' = d\psi,$$

dû à la rotation $\theta \cos i$ autour de la verticale OG : et par ces deux mouvements, exécutés l'un après l'autre, on a le lieu du corps au bout de cet instant dt.

28. Dans la nature, ces deux mouvements ne sont pas exécutés l'un après l'autre, ils sont *simultanés,* ou plutôt ils n'en font qu'un seul qui est le composé de ces deux-là. Mais, comme on ne considère qu'un temps infiniment petit dt, les deux espaces qu'un point quelconque du corps tend à décrire en vertu des deux rotations $\theta \sin i$ et $\theta \cos i$, sont censés *rectilignes,* comme les deux côtés d'un parallélogramme : et ce point étant porté d'abord le long de l'un de ces côtés, et ensuite sur une ligne égale et parallèle à l'autre, se trouve alors au bout de la diagonale, c'est-à-dire au même lieu de l'espace où il serait arrivé par son mouvement naturel en suivant cette diagonale. Si donc on imagine que cette double opération, que je viens de décrire, soit répétée pour chaque partie infiniment petite dt du temps t, on aura la suite des lieux où le corps passe dans le cours de sa rotation, ou l'image fidèle de son mouvement dans l'espace.

Mais si l'on demandait simplement de *marquer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps quelconque,* sans s'occuper de la route que le corps suit pour y arriver, on n'aurait pas besoin de supposer que la double opération dont il s'agit soit répétée à chaque instant. On pourrait d'un seul coup faire rouler le cône (OT) par un angle fini ω égal à la somme de tous les angles TOT' que la génératrice OT trace à la surface de ce cône pendant le temps donné t; et, ensuite, le faire glisser en tournant autour de la verticale OG par un angle ψ égal à la somme de tous les angles T'OT'' qui sont dus à la rotation du corps autour de cette verticale pendant le même temps t. Par ces deux opérations, exécutées l'une après l'autre, et dans l'ordre qu'on voudra, le corps, il est vrai, n'aurait pas suivi le mouvement qu'il a dans la nature, mais il se trouverait actuellement posé dans le même

lieu de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps t. D'où l'on voit que le problème de déterminer le lieu du corps au bout d'un temps quelconque, se réduit à chercher les deux sommes ou intégrales

$$\omega = \int (\mathrm{TOT}'), \quad \psi = \int (\mathrm{T}'\mathrm{OT}''),$$

en fonction du temps t.

29. Quant à la seconde intégrale ψ, elle se trouve sur-le-champ, car il est évident qu'on a

$$\mathrm{T}'\mathrm{OT}'' = d\psi = \zeta \cos i \cdot dt;$$

or on a trouvé

$$\zeta \cos i = const. = \frac{h}{k};$$

on a donc

$$d\psi = \frac{h}{k} \cdot dt.$$

d'où l'on tire

$$\psi = \frac{h}{k} \cdot t,$$

en faisant commencer l'angle ψ avec le temps t.

Mais l'autre intégrale

$$\omega = \int (\mathrm{TOT}')$$

ne se trouve pas aussi aisément : il faut commencer par chercher l'expression différentielle de l'angle TOT'.

Pour cela je remarque que cet angle TOT', ajouté à l'angle T'OT'', forme l'angle TOT'' que la projection de l'axe instantané OI décrit autour de l'axe du couple; car le point T est la projection continuelle du pôle I sur le plan de ce couple. On a donc, en nommant $d\varphi$ ce dernier angle,

$$d\omega + d\psi = d\varphi;$$

or on a trouvé précédemment

$$d\varphi = \zeta \cos i \cdot dt + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2 \cdot k^3 \cdot \theta^2 \sin^2 i} \cdot dt;$$

on a donc, en comparant les deux expressions de $d\varphi$,

$$d\omega = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2 \cdot k^3 \cdot \theta^2 \sin^2 i} \cdot dt.$$

l'on l'on tire

$$\omega = \frac{h^2 - a^2}{h\,k}\frac{(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{} \int \frac{dt}{k^2\theta^2 - h^2}.$$

Pour avoir ω, il faudra donc mettre d'abord, au lieu de θ^2, sa valeur en fonction de t, et puis intégrer l'expression $\int dt : (k^2\theta^2 - h^2)$; mais cette intégrale demande encore l'emploi des fonctions elliptiques.

30. Il faut remarquer que les lignes h et k étant essentiellement positives, et $d\psi$ étant égal à $\frac{h}{k}\,dt$, cet angle $d\psi$ peut toujours être regardé comme ayant le même signe $+$; mais l'angle $d\omega$ a tantôt le signe $+$ et tantôt le signe $-$, selon que h est $<$ ou $>$ b.

FIG. 21. Si $h < b$, le cône OT entoure le petit axe c de l'ellipsoïde central, et, dans ce cas, l'angle $d\omega$, de même signe que $d\psi$, *s'ajoute* à cet angle pour former l'angle $d\varphi$ que la projection de l'axe instantané décrit autour de l'axe du couple.

FIG. 22. Si $h > b$, le cône (OT) entoure le grand axe a; et, dans ce cas, l'angle $d\omega$, de signe contraire à $d\psi$, doit en être retranché pour former l'angle $d\varphi$.

31. Enfin, dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OT) se réduit à une droite OT située dans le plan des axes extrêmes a et c, et inclinée sur a d'un angle dont la tangente est $-\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$; l'angle $d\omega$ est *nul*, et $d\varphi$ se réduit simplement à l'angle

$$d\psi = \frac{h}{k}\,dt.$$

Ainsi, dans le cas de $h = b$, il existe dans le corps un axe *singulier* OT qui a la propriété de décrire uniformément le plan fixe MON du couple, avec une vitesse constante

$$\frac{h}{k} = \frac{b}{k},$$

tandis que le corps tourne autour de cet axe singulier avec une vitesse variable

$$\theta \sin i = \sqrt{\theta^2 - b^2}$$

Dans ce cas, on n'a besoin que des règles ordinaires du calcul intégral pour déterminer la position du corps au bout d'un temps donné t. Car, pour amener le corps dans cette position, il suffirait de le faire tourner d'abord autour de l'axe du couple d'un angle

$$\psi = \frac{h}{k} t;$$

et ensuite, de le faire tourner sur son axe singulier OT, d'un angle τ égal à $\int \theta \sin i . dt$. Or, dans le cas de $h = b$, nous avons trouvé, pour l'expression de $\theta \sin i$ en fonction de t,

$$\theta \sin i = \frac{2n}{k} \cdot \frac{e^{\frac{nt}{k}}}{1 + e^{\frac{2nt}{k}}},$$

où e désigne la base des logarithmes de Néper, et n la valeur du radical $\sqrt{\beta^2 - b^2}$. Multipliant donc par dt cette expression de $\theta \sin i$, intégrant, et faisant commencer l'arc τ avec le temps t, on a

$$\tau = 2\left(\text{arc tang } e^{nt:k} - \frac{\pi}{4}\right).$$

32. Les deux cas de $h = a$, ou $h = c$ n'ont aucune difficulté; car les axes OI, OG se confondent entre eux et avec l'axe a, ou l'axe c du corps; et tout se réduit à une simple rotation constante $h : k$, autour de cet axe a, ou c, qui demeure immobile dans l'espace absolu.

33. Si l'ellipsoïde central a deux de ses axes égaux entre eux, le cône (OT) est un cône droit à base circulaire autour de l'axe de révolution de ce sphéroïde. Alors $\theta \sin i$ est constant, et, par conséquent, $d\omega$ est constant, aussi bien que $d\psi$ et $d\varphi$, et l'on a sur-le-champ la valeur de ces angles pour un temps quelconque t.

Si l'ellipsoïde central a ses trois axes égaux et devient une sphère, tout se réduit à un mouvement simple de rotation autour du diamètre qui fait l'axe du couple appliqué G.

Tous ces cas particuliers n'ont aucune espèce de difficulté et se résolvent d'eux-mêmes : il n'y a de remarquable que le cas singulier de $h = b$ qui se résout par l'intégration de la différentielle $\int \theta \sin i . dt$, laquelle ne dépend que des fonctions exponentielles et circulaires.

Remarque I.

34. J'ai trouvé plus haut l'expression de l'angle $d\omega$ par celle de l'angle $d\varphi$, qui nous était déjà connue (n° **13**). Mais cet angle $d\omega$, que trace le cône (OT) en roulant sur le plan du couple, peut se trouver aussi d'une manière directe, comme on va le voir dans l'article suivant, ce qui servira à confirmer notre analyse.

Au point T de la surface de ce cône (OT), la ligne de moindre courbure est évidemment la génératrice OT; et, par conséquent, la ligne de plus grande courbure est perpendiculaire à cette génératrice.

Considérons sur cette ligne de courbure l'arc infiniment petit ds qui se couche en un instant dt sur le plan MN quand le cône roule sur ce plan en vertu de la rotation $\theta \sin i$ qu'il a sur sa génératrice actuelle OT. Il est évident que $\theta \sin i . dt$ est l'angle de contingence, c'est-à-dire l'angle formé par les deux tangentes menées aux extrémités de l'arc ds, ou, ce qui revient au même, l'angle formé par les deux normales menées à la surface du cône en ces deux points. Or cet angle est exprimé par $\frac{ds}{R}$, en nommant R le rayon de la courbure. On a donc

$$\theta \sin i . dt = \frac{ds}{R}.$$

Mais l'angle formé par les deux génératrices voisines OT et OT′ qui vont du point O aux deux bouts du même arc ds, et que nous avons nommé $d\omega$, est évidemment exprimé par

$$d\omega = \frac{ds}{\mathrm{OT}} = \frac{ds}{k\theta \sin i}$$

on a donc, pour l'expression de $d\omega$,

$$d\omega = \frac{R}{k} dt.$$

où R désigne le rayon de la plus grande courbure à la surface du cône (OT), au point T extrémité de la génératrice

$$\mathrm{OT} = k\theta \sin i.$$

Or, l'équation de la surface conique (OT) étant

$$\frac{x^2}{h^2-a^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}+\frac{z^2}{h^2-c^2}=0,$$

le rayon R de la courbure en un point quelconque dont les coordonnées seraient x, y, z, est exprimé par

$$R=\frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)\left[\sqrt{z^2+\frac{(h^2-c^2)^2}{(h^2-b^2)^2}y^2+\frac{(h^2-c^2)^2}{(h^2-a^2)^2}x^2}\right]}{(h^2-c^2)(x^2+y^2+z^2)}$$

et, comme le point T dont il s'agit n'est pas un point quelconque de la surface du cône, mais un point qui doit se trouver en même temps sur la surface de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{h^2-a^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}+\frac{z^2}{h^2-c^2}=\frac{1}{h^2},$$

le trinôme qui est sous le radical se réduit ici à la constante $\frac{(h^2-c^2)^2}{h^2}$.

En substituant cette valeur, il vient donc pour R, cette expression

$$R=\frac{h^2(h^2-a^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2)}{h(x^2+y^2+z^2)}.$$

Or on a

$$x^2+y^2+z^2=OT^2=k^2\theta^2\sin^2\iota;$$

il vient donc, pour l'expression de $d\omega=\frac{R}{k}\,dt$,

$$d\omega=\frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2)}{h^2k\theta^2\sin^2\iota}\cdot dt,$$

ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait trouvé plus haut par une voie différente.

Remarque II.

55. Je ferai encore ici une remarque importante pour montrer comment, dans le cas de $h>b$, le mouvement angulaire $d\varphi$ du pôle instantané I de rotation est égal à la *différence* $d\psi-d\omega$ de l'angle $d\psi$ par lequel le cône (OT) glisse sur le plan du couple, à l'angle $d\omega$ par FIG. 5

lequel ce cône roule sur le même plan; tandis que, dans le cas de $h < b$, l'angle $d\varphi$ est égal à la *somme* $d\psi + d\omega$ de ces deux angles.

Pour plus de clarté, considérons les choses au moment où le pôle instantané I traverse l'ellipse moyenne (ac) de l'ellipsoïde central. Si l'on mène en I la tangente à cette ellipse, qu'on abaisse sur elle la perpendiculaire OP, et qu'on achève le rectangle IPOT; on voit que OP sera la direction de l'axe du couple d'impulsion, et OT la génératrice actuelle du cône (OT); et comme OI est situé dans l'angle droit COA des axes extrêmes c et a, il est clair que la perpendiculaire OP à la tangente en I sera située aussi dans le même angle droit : donc OT perpendiculaire à OP tombera *au-dessous* de l'axe OA par rapport aux axes OI et OP que je regarde comme étant *au-dessus*.

Or, si l'on a $h > b$, on sait que le cône décrit par OT a pour axe le grand axe $OA = a$ de l'ellipsoïde central : donc, si l'on mène à ce cône le plan tangent suivant OT, ce qui sera le plan même du couple d'impulsion, le cône (OT) sera situé au-dessus de ce plan du même côté que les points I et P. Si donc, en vertu de la rotation $\theta \cos i$ autour de OP, ce cône glisse en un instant dt, d'un angle $d\psi$ sur ce plan tangent, il est clair qu'en vertu de la rotation $\theta \sin i$ autour de OT, il roule sur le même plan par un angle $d\omega$ de *signe contraire* à $d\psi$: de sorte que le mouvement angulaire $d\varphi$ de la génératrice OT est exprimé par la différence $d\psi - d\omega$ de ces deux angles.

FIG. 21. Mais si l'on a $h < b$, ce n'est plus autour du grand axe OA, mais autour du *petit axe* OC, que le cône (OT) se trouve décrit. Et alors ce cône, au lieu d'être situé au-dessus du plan qui le touche en OT, du même côté que le pôle I et le point P, se trouve situé au-dessous, du côté opposé. Si donc ce cône, par la rotation autour de OP, glisse sur le plan d'un angle $d\psi$, il est clair que par l'autre rotation autour de OT, il roule sur ce plan d'un angle $d\omega$ de *même signe* que $d\psi$: de sorte que, dans ce cas, le mouvement angulaire $d\varphi$ du point T est exprimé par la somme $d\psi + d\omega$ de ces deux angles.

56. On voit par là comment il arrive que, dans le cas singulier $h = b$, on a simplement

$$d\varphi = d\psi = \theta \cos i \, . \, dt = \frac{h}{c} \, dt.$$

car, le cas de $h = b$ pouvant être considéré comme appartenant à la fois à l'un et à l'autre des deux cas précédents, l'angle $d\omega$ devrait avoir également le signe $+$ et le signe $-$; ce qui ne peut être ici, à moins qu'on n'ait $d\omega = 0$: c'est, en effet, ce qui a lieu, et réduit alors $d\varphi$ à $d\psi$, c'est-à-dire que, dans ce cas singulier, la vitesse angulaire du pôle instantané, autour de l'axe fixe du couple, est constante et mesurée par $\frac{b}{k}$ dans toute la suite du mouvement.

Résumé de notre théorie.

37. On peut donc considérer, *dans l'intérieur du corps*, trois cônes du second ordre, savoir :

1°. Le cône (OI) décrit par l'axe instantané OI ;

2°. Le cône (OT) décrit par la projection continuelle de OI sur le plan fixe MN du couple d'impulsion ;

3°. Le cône (OG) décrit par l'axe fixe OG de ce couple dans l'intérieur du mobile.

Ces trois cônes sont *droits*, à *bases elliptiques*, et tous trois décrits autour d'un *même axe*, qui est, ou le *grand axe* a, ou le *petit axe* c de l'ellipsoïde central, selon que h est $>$ ou $<$ que l'*axe moyen* b de cet ellipsoïde.

Dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OI) se réduit à un plan passant par l'axe moyen. Le cône (OG) se réduit à un autre plan passant par ce même axe, et le cône (OT) se réduit à une droite perpendiculaire à ce dernier plan.

Les surfaces de ces cônes sont toutes trois décrites et achevées dans le même temps.

L'axe OG du couple trace la sienne avec une vitesse angulaire

$$\varsigma \sin i = \sqrt{\varsigma^2 - \frac{h^2}{k^2}}.$$

L'axe OT trace la sienne avec une vitesse angulaire

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2 h^2 k^2 \varsigma^2 - h^2}.$$

L'axe OI trace la sienne avec une vitesse angulaire que l'on trouve égale à

$$\frac{\sqrt{Q - H(\beta^2 + \gamma^2) - R}}{\beta\gamma}$$

expression où l'on a

$$Q = H = \frac{a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2 - 2abc}{b^2}$$

et

$$R = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$$

38. Mais, au lieu de ces trois cônes, on peut ne considérer que trois lignes courbes, et simplifier ainsi les images. Car, I étant le pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central, T la projection de ce point sur le plan du couple, et P sa projection sur l'axe OG, on peut considérer les trois orbes elliptiques, à double courbure, s, τ et π décrits par les points I, T et P dans l'intérieur du corps, et regarder ces orbes comme les bases de nos trois surfaces coniques dont le commun sommet est au centre O. Faisant donc abstraction de tout le reste, pour ne plus voir que ce centre O et l'une de ces trois espèces de roues s, τ, π, que je viens de définir, le mouvement du corps pourrait se peindre des trois manières suivantes :

FIG. 24. I. Si l'on suppose que l'orbe s, mis en contact avec le plan fixe MIN parallèle au plan du couple, roule sans glisser sur ce plan, et de manière qu'il tourne sans cesse sur son rayon OI avec une vitesse angulaire θ proportionnelle à ce rayon, on aura le mouvement précis du corps dans l'espace : c'est l'image la plus claire de ce mouvement.

II. Si, sur le plan MON du couple (qu'on suppose ici mené par le centre O), on fait rouler l'orbe τ avec la vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ trouvée ci-dessus, et qu'en même temps on le fasse glisser avec la vitesse angulaire constante $\frac{h}{k}$, on aura de même la représentation exacte du mouvement du corps : c'est une autre image de ce mouvement, mais un peu moins simple que la précédente.

III. Enfin, si l'on imagine que l'orbe π, dont le rayon OP est constant et de longueur h, glisse le long de sa tangente au point P

avec une vitesse angulaire $\frac{\sqrt{h^2 g^2 - k^2}}{k}$, et tourne sur son rayon OP avec une vitesse angulaire constante $\frac{h}{k}$, on aura une troisième image du mouvement du corps; mais peut-être encore moins simple que la seconde. On pourrait donc écarter l'une et l'autre; mais, dans une matière aussi difficile, cette variété de démonstrations ne peut que jeter plus de jour sur le fond des choses, et je n'ai pas cru devoir les supprimer. Au reste, de toutes ces démonstrations, la meilleure, je veux dire celle où l'esprit trouve l'appui le plus naturel et le plus sensible, est celle de l'ellipsoïde central, dont on retient le centre immobile au même point de l'espace, et qu'on fait rouler sur le plan fixe du couple, sans aucun mouvement de *rasion* sur ce plan.

Équations des trois orbes s, τ, π, que nous venons de considérer.

59. On a déjà vu que l'orbe s, décrit à la surface de l'ellipsoïde central, par le pôle instantané I, est donné par l'intersection de cet ellipsoïde, dont l'équation est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

avec la surface d'un autre ellipsoïde, dont l'équation est

$$(2) \qquad \frac{b^2 x^2}{a} + \frac{b^2 y^2}{b} + \frac{b^2 z^2}{c} = 1.$$

x', y', z' étant les coordonnées du pôle I parallèles aux axes respectifs a, b, c de l'ellipsoïde central.

On a vu que le plan du couple, supposé conduit par le centre O de cet ellipsoïde, a pour équation

$$(3) \qquad \frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{c} = 0.$$

Donc, si du pôle I on abaisse une perpendiculaire IT sur ce plan, on aura, pour les équations de cette droite,

$$(4) \qquad a^2 z' (x - x') - c^2 x' (z - z') = 0,$$

$$(5) \qquad a^2 y' (x - x') - b^2 x' (y - y') = 0.$$

Or, si de ces trois dernières équations, on tire les valeurs de x, y, z coordonnées du pied T de la perpendiculaire, on trouvera [en faisant les réductions qui proviennent des deux premières équations (1) et (2)], ces expressions très-simples,

$$x = \frac{h^2 - a^2}{a^2} x', \quad y = \frac{h^2 - b^2}{b^2} y', \quad z = \frac{h^2 - c^2}{c^2} z';$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{a^2 x}{h^2 - a^2}, \quad y' = \frac{b^2 y}{h^2 - b^2}, \quad z' = \frac{c^2 z}{h^2 - c^2}.$$

Donc, en mettant ces valeurs de x', y', z' dans les équations (1) et (2), on aura en x, y, z les deux équations

$$\frac{a^2 x^2}{(h^2 - a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(h^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(h^2 - c^2)^2} = 1,$$

$$\frac{h^2 x^2}{(h^2 - a^2)^2} + \frac{h^2 y^2}{(h^2 - b^2)^2} + \frac{h^2 z^2}{(h^2 - c^2)^2} = 1,$$

qui appartiennent à deux nouveaux ellipsoïdes dont l'intersection donne l'orbite τ décrite par le point T qui est la projection continuelle du pôle I sur le plan du couple.

Remarque I.

40. Si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$\text{OT} \qquad \frac{x^2}{h^2 - a^2} + \frac{y^2}{h^2 - b^2} + \frac{z^2}{h^2 - c^2} = 0,$$

équation de la surface conique décrite par la ligne OT dans l'intérieur du corps. Et c'est ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé d'une autre manière, en cherchant cette surface conique, comme la suite des normales OT à la surface du cône décrit par l'axe OG du couple dans l'intérieur du mobile. Et, en effet, cette dernière surface décrite par OG a pour équation

$$\text{OG} \qquad (h^2 - a^2) x^2 + (h^2 - b^2) y^2 + (h^2 - c^2) z^2 = 0.$$

Or il est clair que l'une de ces deux surfaces coniques peut être re-

gardée comme la suite des normales à la surface de l'autre : d'où l'on voit qu'il suffit d'en connaître une pour les avoir toutes deux.

41. Dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OG) se réduit à un plan passant par l'axe moyen b, et dont l'équation est

$$\frac{z}{x} = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}};$$

et le cône (OT) à une simple ligne droite perpendiculaire à ce plan, et dont l'équation est

$$\frac{z}{x} = -\frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Par conséquent, l'orbite τ décrite par le point T ne peut être ici qu'une ligne terminée OT, allant du centre O jusqu'au point T qui répond à la distance *maximum* $\sqrt{\beta^2 - b^2}$ de ce point au centre O.

42. Dans les deux cas particuliers de $h = a$, ou $h = c$, l'orbite τ se réduit à un point qui est le centre O de l'ellipsoïde central.

Remarque II.

43. Si l'on ne combinait ensemble que les équations (1), (2), (4) et (5) pour en éliminer x', y', z', et qu'on n'employât point l'équation (3) du plan du couple, on aurait en x, y, z une équation qui répondrait à la surface tracée par la suite des normales IT que l'on mènerait à la surface de l'ellipsoïde central, le long de l'orbite s décrite par le pôle instantané I ; et si l'on portait ensuite sur chaque normale IT, à partir de son pied I, et du même côté que l'ellipsoïde, une longueur IT égale à la ligne h, la suite des extrémités de toutes ces lignes formerait encore l'orbite τ décrite par le point T.

Au lieu de l'équation (3) on pourrait donc employer l'équation suivante :

$$(\mathrm{P}) \qquad (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = h^2,$$

qui exprime que la ligne IT est de longueur constante h. Mais comme cette équation exprimerait également que la ligne IT peut être portée

de l'autre côté du plan tangent, la combinaison des cinq équations (1), (2), (4), (5) et (P) donnerait, non-seulement l'orbite τ décrite par le pied de la perpendiculaire IT au plan du couple, mais une autre orbite τ' décrite par le point T′ situé à la même distance IT′ au dehors de l'ellipsoïde : courbe tout à fait différente dans l'espace relatif, et qui est ici étrangère à la question; mais, dans l'espace absolu, la route du point T′ serait parfaitement égale et parallèle à la route du point T.

Remarque III.

44. La combinaison des cinq équations (1), (2), (4), (5) et P est peut-être encore plus facile que celle des quatre premières avec l'équation (3). Car, en tirant des équations (4) et (5) les valeurs de $(z - z')$, $(y - y')$ pour les porter dans l'équation (P), on a tout de suite

$$(x - x')^2 \left[1 + \frac{a^2}{x'^2} \left(\frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} \right) \right] = h^2,$$

d'où, en mettant pour $\frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}$ sa valeur $\frac{1}{h^2} - \frac{x'^2}{a^4}$ tirée de l'équation (2), on a

$$(x - x')^2 \cdot \frac{a^2}{h^2 x'^2} = h^2,$$

ce qui donne

$$x' = \frac{a^2 x}{h^2 \pm a^2};$$

et il est évident qu'on aurait de même

$$y' = \frac{b^2 y}{h^2 \pm b^2}, \quad z' = \frac{c^2 z}{h^2 \pm c^2},$$

expressions toutes semblables à celles du n° **39**, mais où des deux signes $\pm$ il ne faut prendre que le signe $-$, si l'on veut ne considérer, sur la normale IT, que le point T qui tombe du même côté que la surface de l'ellipsoïde central à l'égard du plan tangent en I : car, en prenant les signes $+$, on aurait un point T situé de l'autre côté de ce plan tangent, et la ligne OT, menée du centre O, ne serait plus perpendiculaire à la normale IT, comme on le veut dans la question proposée.

45. Au reste, pour lever toute équivoque, il est évident que les coordonnées du point T qui sont x, y, z doivent être telles, qu'elles satisfassent à l'équation du plan du couple, qui est

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Or, en y mettant pour x, y, z les doubles valeurs

$$x = \frac{(h^2 \pm a^2)x'}{a}, \quad y = \frac{(h^2 \pm b^2)y'}{b^2}, \quad z = \frac{(h^2 \pm c^2)z'}{c^2},$$

on aurait

$$\frac{x'^2}{a^2}(h^2 \pm a^2) + \frac{y'^2}{b^2}(h^2 \pm b^2) + \frac{z'^2}{c^2}(h^2 \pm c^2) = 0,$$

ou, d'après l'équation (2),

$$\pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} \pm \frac{z'^2}{c^2} + 1 = 0;$$

mais celle-ci, à cause de l'équation (1), n'est évidemment possible qu'en adoptant à la fois les trois signes inférieurs $-$, ce qui nous ramène aux expressions simples de x, y, z trouvées par la première analyse.

Enfin, quant à l'orbe π décrit par le point P pris à la distance $OP = h$ sur l'axe OG du couple d'impulsion, il est très-facile d'en trouver les équations. Il est évident que cette courbe n'est autre chose que l'intersection de la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2.$$

avec la surface conique décrite par OG, et dont l'équation est

$$(h^2 - a^2)x^2 + (h^2 - b^2)y^2 + (h^2 - c^2)z^2 = 0.$$

D'où l'on voit que cette courbe π est un orbe sphérique, à double courbure, comme les orbes elliptiques τ et s, et qu'elle est décrite autour du même axe.

46. En considérant les deux cônes (OP) et (OT) terminés par ces orbes π et τ qui leur servent de bases, le mouvement du corps se fait

de telle manière que le corps tourne, à chaque instant dt, sur les génératrices OP et OT de ces deux cônes, avec des vitesses angulaires proportionnelles aux longueurs mêmes de ces génératrices : de sorte que la première vitesse $\theta \cos i$ est constante comme la ligne OP, et que la seconde $\theta \sin i$ est variable comme la ligne OT.

CHAPITRE III.

MOUVEMENTS ANGULAIRES DES AXES PRINCIPAUX DU CORPS DANS L'ESPACE ABSOLU.

I.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le mouvement de l'axe *instantané*, parce qu'il suffit de le connaître, et dans le corps et dans l'espace, pour avoir le mouvement du corps lui-même, et, par suite, les mouvements des trois axes principaux que le corps entraîne avec soi dans l'espace absolu.

Mais il n'est peut-être pas inutile d'indiquer en peu de mots ces corollaires, et de montrer, à l'égard de chacun de ces axes principaux a, b, c, le mouvement qu'il a pour tourner autour de l'axe *fixe* du couple d'impulsion; pour s'abaisser et se relever alternativement sur le plan de ce couple : ce qui répond aux mouvements qu'on appelle, en Astronomie, la *précession* des nœuds, la *nutation* de l'axe; quantités analogues à celles qui, dans l'analyse précédente (relative à l'axe et à l'équateur *instantanés*), sont désignées par $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{di}{dt}$, et dont les valeurs en fonction de θ, et par conséquent, du temps t, sont exprimées par

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{\lambda} + \frac{\sqrt{\Delta}}{h\sqrt{h^2 q^2 - h^2}},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{h}{q\sqrt{h^2 q^2 - h^2}}.$$

47. Soient donc ici λ, μ, ν les trois angles que les rayons principaux a, b, c font avec l'axe fixe du couple d'impulsion, et repre-

nons les lettres x, y, z pour désigner les lignes kp, kq, kr; il est aisé de voir qu'on a les trois équations suivantes :

$$(1.)\qquad \cos\lambda = \frac{hx}{a^2},\quad \cos\mu = \frac{hy}{b^2},\quad \cos\nu = \frac{hz}{c^2},$$

et, par conséquent, celles-ci :

$$(2.)\qquad \sin^2\lambda = \frac{a^2 - h^2x^2}{a^2},\quad \sin^2\mu = \frac{b^2 - h^2y^2}{b^2},\quad \sin^2\nu = \frac{c^2 - h^2z^2}{c^2}.$$

D'où l'on peut conclure en passant, que si l'on prolonge les rayons a, b, c jusqu'aux points A′, B′, C′ où ils vont rencontrer le plan du couple d'impulsion (lequel est à la distance h du centre O), on aura, en faisant les lignes variables

$$OA' = \rho_a,\quad OB' = \rho_b,\quad OC' = \rho_c,$$

les équations

$$\rho_a^2 = \frac{a^2}{x^2},\quad \rho_b^2 = \frac{b^2}{y^2},\quad \rho_c^2 = \frac{c^2}{z^2}$$

ce qui donne ces deux propriétés assez remarquables,

$$\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} = \textit{constante} = \frac{1}{h^2}.$$

$$\frac{a^2}{\rho_a^2} + \frac{b^2}{\rho_b^2} + \frac{c^2}{\rho_c^2} = \textit{constante} = 1.$$

48. Maintenant, soient $\frac{d\pi_a}{dt}$, $\frac{d\pi_b}{dt}$, $\frac{d\pi_c}{dt}$, ou simplement $\dot{\pi}_a$, $\dot{\pi}_b$, $\dot{\pi}_c$ les vitesses angulaires des projections des trois axes a, b, c sur le plan du couple, je dis qu'on aura les trois équations suivantes :

$$\dot{\pi}_a = \frac{h}{k}\cdot\frac{a^2 - x^2}{a^2\sin^2\lambda},$$

$$\dot{\pi}_b = \frac{h}{k}\cdot\frac{b^2 - y^2}{b^2\sin^2\mu},$$

$$\dot{\pi}_c = \frac{h}{k}\cdot\frac{c^2 - z^2}{c^2\sin^2\nu},$$

dont la démonstration directe est très-facile.

Et, en effet, il est clair que $\dot{\pi}_a\,dt$ ne désigne autre chose que l'angle

décrit par la projection du rayon a sur le plan du couple pendant l'instant dt. Or la projection de a est $a \sin \lambda$, et, par conséquent, l'expression $a^2 \sin^2 \lambda . \pi_a \, dt$ représente l'aire décrite par cette projection de a : mais l'aire décrite sur un plan par la projection d'une ligne n'est autre chose que la projection de l'aire décrite dans l'espace par la ligne elle-même. Nous n'avons donc qu'à chercher l'aire que le rayon a décrit dans l'espace, à la projeter sur le plan du couple, et à l'égaler à l'expression $a^2 \sin^2 \lambda . \pi_a \, dt$.

Or, dans un instant dt, le corps tourne autour de a d'un angle $p \, dt$; mais, par cette première rotation, la ligne a demeure immobile et ne produit aucune aire dans l'espace : il ne reste donc à considérer que les deux autres rotations $q \, dt$, $r \, dt$ qui ont lieu dans le même instant autour des deux autres axes b et c.

Par la première, le corps tourne autour de b d'un angle $q \, dt$; et, par conséquent, le rayon a décrit un secteur $a^2 q \, dt$ dans un plan perpendiculaire à b, lequel, étant projeté sur le plan du couple, donne l'aire

$$a^2 q \, dt \times \cos \mu.$$

Par la dernière rotation, le corps tourne autour de c d'un angle $r \, dt$, et le rayon a décrit un secteur $a^2 r \, dt$ perpendiculaire à c, lequel, projeté sur le plan du couple, donne l'aire

$$a^2 r \, dt \times \cos \nu.$$

On a donc l'équation

$$a^2 \sin^2 \lambda . \pi_a \, dt = (a^2 q \cos^2 \mu + a^2 r \cos \nu) \, dt,$$

ou bien, en divisant de part et d'autre par $a^2 \, dt$, et remettant, au lieu de q et r, leurs valeurs $\frac{x}{k}$ et $\frac{z}{k}$,

$$\sin^2 \lambda . \pi_a = \frac{k}{k} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = \frac{k}{k} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right);$$

ce qui est la première de nos trois équations. Et il est évident qu'on aurait de même la seconde, en y changeant a en b, x en y, et λ en μ; et ensuite la troisième, en y changeant a en c, x en z, et λ en ν.

Ainsi on aura

$$(\Pi)\quad \begin{cases} \dot{\pi}_a = \dfrac{h}{k} \cdot \dfrac{a^2 - x^2}{a^2 \sin^2 \lambda}, \\[2ex] \dot{\pi}_b = \dfrac{h}{k} \cdot \dfrac{b^2 - y^2}{b^2 \sin^2 \mu}, \\[2ex] \dot{\pi}_c = \dfrac{h}{k} \cdot \dfrac{c^2 - z^2}{c^2 \sin^2 \nu}; \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

49. Si l'on multiplie la première de ces trois équations par $\sin^2 \lambda$, la deuxième par $\sin^2 \mu$, la troisième par $\sin^2 \nu$, et qu'on les ajoute, il vient

$$\sin^2 \lambda \,.\, \dot{\pi}_a + \sin^2 \mu \,.\, \dot{\pi}_b + \sin^2 \nu \,.\, \dot{\pi}_c = \frac{h}{k}(3 - 1) = 2\frac{h}{k}.$$

Or, qu'on prenne sur les axes principaux, et à partir du centre, trois lignes égales à l'unité, et l'on pourra voir $\sin \lambda$, $\sin \mu$, $\sin \nu$ comme les trois projections de ces lignes sur le plan fixe du couple; et $\sin^2 \lambda \,.\, \dot{\pi}_a$, $\sin^2 \mu \,.\, \dot{\pi}_b$, $\sin^2 \nu \,.\, \dot{\pi}_c$ comme les fluxions des trois aires décrites par ces projections sur le même plan. Donc, en considérant la somme de ces trois aires, on aura, pour cette somme, l'expression très-simple

$$2\frac{h}{k}t,$$

où l'on peut remarquer que $\frac{h}{k}$ est la vitesse angulaire constante $\theta \cos i$ du système autour de l'axe fixe du couple d'impulsion G.

50. Si, en considérant les mêmes équations (Π), on multiplie la première par $\frac{\sin^2 \lambda}{a^2}$, la deuxième par $\frac{\sin^2 \mu}{b^2}$, la troisième par $\frac{\sin^2 \nu}{c^2}$, il vient

$$\frac{1}{a^2} \sin^2 \lambda \,.\, \dot{\pi}_a = \frac{h}{ka^2} - \frac{h}{k}\frac{x^2}{a^4},$$

$$\frac{1}{b^2} \sin^2 \mu \,.\, \dot{\pi}_b = \frac{h}{kb^2} - \frac{h}{k}\frac{y^2}{b^4},$$

$$\frac{1}{c^2} \sin^2 \nu \,.\, \dot{\pi}_c = \frac{h}{kc^2} - \frac{h}{k}\frac{z^2}{c^4},$$

d'où, en ajoutant, on tire cette équation remarquable,

$$\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda\,.\,\dot{\pi}_a + \frac{1}{b^2}\sin^2\mu\,.\,\dot{\pi}_b + \frac{1}{c^2}\sin^2\nu\,.\,\dot{\pi}_c = \frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right).$$

Or $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ne sont autre chose que les bras de l'inertie du corps autour des axes principaux : si donc, à partir du centre O, on porte sur les axes, trois lignes égales aux *bras respectifs de l'inertie* autour des mêmes axes, on pourra considérer $\frac{1}{a}\sin\lambda$, $\frac{1}{b}\sin\mu$, $\frac{1}{c}\sin\nu$ comme les trois projections de ces lignes sur le plan du couple, et $\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda\,.\,\dot{\pi}_a$, $\frac{1}{b^2}\sin^2\mu\,.\,\dot{\pi}_b$, $\frac{1}{c^2}\sin^2\nu\,.\,\dot{\pi}_c$ comme les fluxions des trois aires que ces projections décrivent sur le même plan pendant le mouvement du corps; donc, en multipliant par dt et intégrant, on aura pour la somme de ces aires décrites dans le temps t,

$$\frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right)\cdot t.$$

51. Voilà donc deux propriétés nouvelles du mouvement d'un corps libre qui tourne sur son centre de gravité :

1°. *Si, à partir de ce centre, on porte sur les axes principaux du corps, trois lignes égales entre elles et d'une longueur quelconque* R, *la somme des aires décrites par leurs trois projections sur le plan fixe du couple d'impulsion sera proportionnelle au temps; et elle sera exprimée par* $2\frac{h}{k}\cdot R^2 t$;

2°. *Si l'on porte sur les mêmes axes principaux, trois lignes proportionnelles aux trois bras de l'inertie du corps autour des mêmes axes, la somme des trois aires décrites par leurs projections sur le plan du couple sera aussi proportionnelle au temps;* et cette somme sera exprimée par

$$j^2\cdot\frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right)\cdot t,$$

j étant le commun rapport des trois lignes aux trois bras d'inertie; ce qui forme deux théorèmes très-remarquables dans la théorie de la

rotation d'un corps libre de toute action étrangère : théorèmes en quelque sorte géométriques, et qu'il ne faut pas confondre avec ceux qui regardent le principe ordinaire de la conservation des aires, quoiqu'ils en dépendent au fond, et qu'on puisse en rapprocher les expressions, comme on peut le voir dans l'article suivant.

52. Et, en effet, si l'on considère tous les rayons vecteurs menés du centre à toutes les molécules égales du corps, et la moyenne de toutes les aires que leurs projections tracent sur le plan fixe du couple, on aura évidemment, pour cette *aire moyenne*, l'expression $\frac{G}{m}$; G étant la grandeur du couple d'impulsion, et m la masse du corps, ou le nombre de toutes ses molécules. Ainsi, comme on a représenté G par $\frac{m}{hk}$, on aura, pour l'expression de cette aire moyenne, décrite dans le temps t,

$$\frac{1}{hk} \cdot t.$$

53. Si donc on voulait que l'aire précédente $2\frac{h}{k} \cdot \mathrm{R}^2 . t$, due aux mouvements des trois rayons égaux R, pris sur les trois axes du corps, fût égale à cette aire moyenne $\frac{1}{kh} \cdot t$ du système de tous les rayons vecteurs menés aux particules du corps, il faudrait choisir la longueur du rayon R de manière qu'on eût

$$2\frac{h}{k}\mathrm{R}^2 = \frac{1}{kh}:$$

ce qui donne, pour R, l'expression

$$\mathrm{R} = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Ainsi, en prenant, sur les axes principaux du corps, trois lignes égales à $\frac{1}{h\sqrt{2}}$, on peut dire que, pendant le mouvement du corps, ces trois lignes projetées sur le plan du couple y décrivent trois aires dont la somme est égale à l'aire moyenne du système : de sorte qu'en multipliant cette aire par la masse m du corps, on a l'aire totale due au couple d'impulsion G.

54. On pourrait chercher de même les rayons inégaux R_a, R_b, R_c, mais proportionnels aux bras respectifs de l'inertie $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, qu'il faudrait prendre sur les axes, pour que l'aire décrite fût égale à l'aire moyenne du système. En désignant, comme ci-dessus, par j le rapport inconnu de R_a à $\frac{1}{a}$, de R_b à $\frac{1}{b}$, de R_c à $\frac{1}{c}$, on aurait, pour déterminer j, l'équation

$$j^2 \cdot \frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{1}{kh}.$$

d'où l'on tire

$$j^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{h^2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2) - a^2 b^2 c^2}.$$

et, par conséquent, en faisant $a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 = B$ et $a^2 b^2 c^2 = C$,

$$R_a = \frac{bc}{\sqrt{Bh^2 - C}},$$

$$R_b = \frac{ac}{\sqrt{Bh^2 - C}},$$

$$R_c = \frac{ab}{\sqrt{Bh^2 - C}}.$$

Ainsi, en prenant les aires décrites par les projections de ces trois lignes, on aurait en somme une aire égale à l'aire moyenne du système.

II.

Propriétés des mouvements de nutation des trois axes principaux vers l'axe fixe du couple d'impulsion.

55. Les trois équations (2) du n° **47** donnent :

$$a^2 \sin^2 \lambda = a^2 - h^2 \frac{x^2}{a^2},$$

$$b^2 \sin^2 \mu = b^2 - h^2 \frac{y^2}{b^2},$$

$$c^2 \sin^2 \nu = c^2 - h^2 \frac{z^2}{c^2}.$$

donc, en ajoutant, on a l'équation

$$(A)\quad a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \sin^2 \mu + c^2 \sin^2 \gamma = a^2 + b^2 + c^2 - h^2 = \textit{constante}.$$

Les mêmes équations (2) donnent

$$\sin^2 \lambda = 1 - h^2 \frac{x^2}{a^2}, \quad \sin^2 \mu = 1 - h^2 \frac{y^2}{b^2}, \quad \sin^2 \nu = 1 - h^2 \frac{z^2}{c^2};$$

donc, en ajoutant, on a

$$(B)\qquad \sin^2 \lambda + \sin^2 \mu + \sin^2 \nu = 3 - 1 = 2 = \textit{constante},$$

ce qui revient à l'équation connue

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

comme cela doit être.

Donc, *si l'on considère les trois pôles* A, B, C *de l'ellipsoïde central, il résulte de l'équation précédente* (A), *que la somme des carrés de leurs distances à l'axe fixe du couple d'impulsion est constante dans tout le cours du mouvement.*

On peut regarder $\sin^2 \lambda$ comme $a^2 \sin^2 \lambda \times \frac{1}{a^2}$, c'est-à-dire comme le produit du carré de la distance du pôle A à l'axe du couple, multipliée par le carré du bras $\frac{1}{a}$ de l'inertie du corps. Il résulte donc de l'équation (B) cet autre théorème :

La somme des carrés des bras de l'inertie du corps respectivement multipliés par les carrés des distances variables des pôles à l'axe du couple, est constante dans tout le cours du mouvement.

III.

Des courbes σ_a, σ_b, σ_c décrites sur le plan du couple par les projections des trois pôles A, B, C *de l'ellipsoïde central.*

56. Si l'on considère les trois courbes σ_a, σ_b, σ_c que décrivent les trois pôles A, B, C projetés sur le plan du couple, on voit que ces trois courbes, dont le cours est infini, et qui, en général, ne se fer-

ment point, sont de même genre que l'herpolhodie σ décrite sur le même plan par le pôle instantané de rotation.

Si h est $> b$, par exemple, et que a soit ainsi l'axe que l'orbe elliptique s du pôle instantané entoure comme un essieu, la courbe σ_a décrite, sur le plan du couple, par la projection du pôle A, sera, comme l'herpolhodie σ, formée par une suite d'ondes égales et régulières autour du même centre P. Et même, comme le *maximum* du rayon vecteur $v_a = a \sin \lambda$ répond au *minimum* de x, et ce *minimum* au *minimum* du rayon vecteur v de la courbe σ, on voit que les sommets supérieurs des ondes de la courbe σ_a répondent aux sommets inférieurs de la courbe σ, et les inférieurs aux supérieurs.

57. Pendant ce temps, les projections des pôles B et C décrivent aussi, autour du même centre P, des courbes σ_b, σ_c qui ont des sommets alternatifs de *maximum* et de *minimum*, où ces deux pôles passent aux mêmes époques, mais l'un B passant par un sommet supérieur, quand l'autre C passe à un sommet inférieur, et réciproquement : et cela, à un angle droit de distance entre le rayon vecteur v_b de l'un et le rayon vecteur v_c de l'autre.

Si h est $< b$, auquel cas l'orbe elliptique s entoure le petit axe c comme son essieu, on aura les mêmes propriétés pour les courbes décrites par les projections des trois pôles.

Ce qu'on peut remarquer dans les deux cas, c'est que la courbe σ_b, décrite par le pôle *moyen* B, est la seule dont les sommets répondent toujours à des sommets de même nom dans l'herpolhodie σ, et que le contraire a toujours lieu pour les deux autres courbes σ_a, σ_c.

Cas singulier de $h = b$.

58. Enfin si $h = b$, auquel cas singulier l'orbe s est une ellipse passant par l'axe moyen b, et la courbe σ une spirale autour du centre P, 1° le pôle moyen B décrira de même une spirale autour du même centre, se rapprochant sans cesse de ce point comme la spirale σ, sans jamais pouvoir l'atteindre; 2° le pôle A décrira aussi une spirale, mais qui ira sans cesse en s'éloignant du même centre, depuis sa distance *minimum* $a \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$, jusqu'à sa distance *maximum* a

qu'elle ne pourra jamais atteindre : cette spirale, décrite par le pôle A, va donc sans cesse en s'épanouissant vers une circonférence de cercle du rayon a, qui en est comme l'asymptote; 3° enfin, il en sera de même de la spirale décrite par le pôle C, et dont le plus petit rayon sera $= c \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$, et le plus grand $= c$.

Cas où l'ellipsoïde central est de révolution

59. Si l'ellipsoïde central est de révolution, l'orbe s est un cercle autour de l'axe de révolution, la courbe σ est un cercle sur le plan du couple, et la projection du pôle de la figure décrit aussi un cercle concentrique. Dans ce cas, il n'y a point, à proprement parler, d'autre pôle de la figure que celui qui fait l'extrémité de l'axe de révolution. Mais si l'on voulait en marquer arbitrairement deux autres sur l'équateur du sphéroïde, pris à un angle droit de distance l'un de l'autre, et considérer les deux courbes que leurs projections décrivent, on aurait deux courbes parfaitement égales, qui ne seraient point circulaires, mais qui formeraient des ondulations régulières autour du même centre : les sommets de noms différents sur les deux courbes étant toujours à un angle droit de distance angulaire l'un de l'autre.

Remarque I.

60. On a trouvé pour la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ du pôle instantané I autour du centre, de l'axe du couple,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} - \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 k \varrho^2}.$$

ϱ étant le rayon vecteur de l'herpolhodie σ. Voyons quelle est, en fonction de son rayon vecteur ϱ_a, l'expression de la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A de l'ellipsoïde autour du même axe fixe.

Cette vitesse angulaire est exprimée, comme on l'a vu plus haut, par

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 \sin^2 \lambda}.$$

Or, $a^2 \sin^2 \lambda$ étant le carré du rayon vecteur ν_a de la courbe σ_a, on a d'abord

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} \cdot \frac{a^2 - x^2}{\nu_a^2};$$

mais, de

$$\nu_a^2 = a^2 \sin^2 \lambda = \frac{a^2 - h^2 x^2}{a^2},$$

on tire

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{h^2}(\nu_a - h^2 - a^2);$$

on a donc, en mettant pour $a^2 - x^2$ cette valeur,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{a^2}{kh} + \frac{a^2(h^2 - a^2)}{khh_2\nu_a^2};$$

d'où l'on voit que l'expression de la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A de la figure est semblable à celle de la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ du pôle instantané I, l'une et l'autre se composant d'une partie constante et l'une partie réciproque au carré du rayon vecteur.

Et il est évident qu'on peut dire la même chose des deux autres pôles B et C, puisque leurs mouvements angulaires sont donnés par la même expression que la précédente en y changeant simplement a en b, et a en c.

Remarque II.

61. Si le corps était de révolution, autour de l'axe principal a par exemple, il est certain que la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A serait égale à celle du pôle instantané I. On doit donc trouver, dans le cas de $b = c$,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

C'est, en effet, ce qui a lieu, car il est aisé de voir que, dans le cas de $b = c$, le carré du rayon vecteur ν de l'herpolhodie σ est constant

et qu'il a pour valeur

$$v^2 = \frac{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}{h^2}.$$

d'un autre côté, on a, pour le carré du rayon vecteur v_a de la courbe σ_a,

$$v_a^2 = \frac{h^2(a^2 - h^2)}{h^2 - b^2};$$

or, en mettant ces valeurs de v^2 et v_a^2 dans les expressions respectives de $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\pi_a}{dt}$, on trouve d'abord

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)^2 . h^2}{hk . (a^2 - h^2)(h^2 - b^2)} = \frac{h}{k} - \frac{h^2 . h^2 - b^2}{h^2 k} = \frac{b^2}{kh},$$

et ensuite

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{h}{k} . \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)}{h^2(a^2 - h^2)} = \frac{h}{k} - \frac{h}{k} . \frac{h^2 - b^2}{h^2} = \frac{b^2}{kh},$$

même valeur que la précédente, comme cela devait être.

Remarque III.

62. Comme dans notre analyse la quantité $\frac{1}{hk}$ exprime la grandeur du couple d'impulsion, on tire de l'expression précédente,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{b^2}{hk},$$

qui ne renferme que le produit hk et le carré de b^2, cette conséquence remarquable : c'est que, dans un corps dont l'ellipsoïde central est de révolution, le mouvement $\frac{d\pi_a}{dt}$ des nœuds de l'équateur sur le plan fixe du couple ne dépend que de la grandeur de ce couple, et point du tout de sa direction; que ce mouvement ne dépend pas non plus du moment d'inertie autour de l'axe a du corps, mais du seul moment d'inertie autour du rayon b de l'équateur. Ainsi, quelles que soient la position du couple par rapport à l'axe, et la valeur du moment d'inertie $\frac{1}{a^2}$ autour de cet axe, le pôle A du corps tournera toujours avec

la même vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ autour de l'axe fixe du couple d'impulsion.

Or il n'est pas difficile de reconnaître que, même sans changer la masse d'un corps, on en pourrait changer la figure d'une infinité de manières telles, que le sphéroïde *central* y aurait pour tous un équateur de même rayon b, mais un axe a qui différerait de l'un à l'autre. On peut donc dire qu'un même couple G, appliqué comme on voudra à l'un quelconque de ces corps, y produirait exactement la même *précession*, c'est-à-dire le même mouvement angulaire de la ligne des nœuds de l'équateur sur le plan fixe de ce couple.

IV.

Équations différentielles des courbes σ_a, σ_b, σ_c.

63. Si l'on voulait avoir l'équation polaire de l'une des courbes σ_a, entre son rayon vecteur v_a et l'angle π_a qu'il décrit sur le plan fixe, il suffirait de chercher l'expression de $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction de v_a, et de la comparer à celle de $\frac{d\pi_a}{dt}$ qui nous est déjà connue.

Ainsi, comme on a

$$a^2 - v_a^2 = \frac{h^2}{a^2} x^2,$$

et d'ailleurs

$$x^2 = \frac{a}{a^2 - b^2 \cdot (a^2 - c^2)} \cdot (u^2 - \alpha^2),$$

on aura, en faisant, pour abréger,

$$\frac{a^2 h^2}{a^2 - b^2 \cdot a^2 - c^2} = n,$$

l'équation

$$(1) \qquad a^2 - v_a^2 = n(u^2 - \alpha^2),$$

d'où l'on tire

$$-\frac{v_a dv_a}{dt} = n \cdot \frac{u du}{dt}.$$

Or on a trouvé précédemment (n° **8**)

$$\frac{u\,du}{dt} = \frac{1}{k}\sqrt{(u^2-\alpha^2)(\beta^2-u^2)(u^2-\gamma^2)},$$

et l'on a, d'après l'équation (1) ci-dessus,

$$u^2-\alpha^2 = \frac{a^2-v_a^2}{n};$$

$$\beta^2-u^2 = \frac{n(\beta^2-\alpha^2)-(a^2-v_a^2)}{n}$$

$$u^2-\gamma^2 = \frac{n(\alpha^2-\gamma^2)+(a^2-v_a^2)}{n}.$$

donc, en substituant ces valeurs, on aura

$$v_a\cdot\frac{dv_a}{dt} = -\frac{1}{k\sqrt{n}}\cdot\sqrt{(a^2-v_a^2)[n(\beta^2-\alpha^2)-(a^2-v_a^2)][(a^2-v_a^2)+n(\alpha^2-\gamma^2)]}.$$

Maintenant, comme on a pour l'expression de $\frac{d\pi_a}{dt}$,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{a^2}{hk}\cdot\frac{h^2-(a^2-v_a^2)}{v_a^2},$$

on aura, en divisant cette équation par la précédente,

$$\frac{d\pi_a}{dv_a} = \frac{a^2\sqrt{n}}{h}\cdot\frac{v_a^2-a^2+h^2}{v_a\sqrt{(v_a^2-a^2)[v_a^2-a^2+h(\gamma^2-\alpha^2)][n(\alpha^2-\beta^2)-v_a^2]}}.$$

ce qui est, entre le rayon vecteur v_a et l'angle π_a qu'il décrit sur le plan fixe du couple d'impulsion, l'équation cherchée de la courbe σ_a.

On trouverait de même les équations polaires des deux autres courbes σ_b, σ_c décrites sur le même plan par les projections des deux pôles B et C de l'ellipsoïde central : il suffirait de changer a en b, et a en c dans l'équation précédente, mais avec cette attention de faire le même changement dans l'expression du nombre n, qui étant ici,

pour σ_a, $$n = \frac{a^2h^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

serait pour σ_b, $$n = \frac{b^2h^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)},$$

et pour σ_c, $$n = \frac{c^2h^2}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}.$$

64. Si, au lieu de la courbe σ_a, décrite par la projection du pôle A, on voulait considérer la courbe $\sigma_{a'}$ tracée par le point A′ où l'axe a prolongé va rencontrer le plan du couple, il est clair qu'en nommant $v_{a'}$ le rayon vecteur de cette nouvelle courbe $\sigma_{a'}$, on aurait d'abord entre v_a et $v_{a'}$, cette relation

$$(\mathrm{R}) \qquad v_{a'}^2 = \frac{a^2 v_a^2}{h^2 + v_a^2}.$$

Or, ces deux rayons vecteurs v_a et $v_{a'}$ étant toujours dans une même direction, il est évident que le mouvement angulaire du rayon $v_{a'}$ est parfaitement égal à celui du rayon v_a, et que, par conséquent, pour avoir la vitesse angulaire $\frac{d\pi_{a'}}{dt}$ du rayon $v_{a'}$, il suffit de mettre, dans l'expression précédente de $\frac{d\pi_a}{dt}$, au lieu de v_a, sa valeur en $v_{a'}$ qui est donnée ci-dessus. On aura donc de suite l'équation

$$\frac{d\pi_{a'}}{dt} = \frac{h}{a} \cdot \frac{v_a^2 + h^2 - a^2}{v_a^2}.$$

A présent, pour obtenir l'équation polaire de cette nouvelle herpolhodie $\sigma_{a'}$, il faudrait chercher l'expression de $\frac{dv_{a'}}{dt}$ en fonction de $v_{a'}$. Or l'équation (R) étant différentiée donne d'abord

$$\frac{dv_{a'}}{dt} = \frac{(h^2 + v_a^2)^2}{a(v_a^2 - av_{a'} + h^2)} \cdot \frac{dv_a}{dt};$$

il ne reste donc qu'à trouver le facteur $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction du rayon $v_{a'}$.

Mais nous avons trouvé plus haut $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction du rayon v_a, et celui-ci, par l'équation (R), est donné en $v_{a'}$; donc, en faisant ces substitutions, on aura l'expression de $\frac{dv_{a'}}{dt}$ en fonction du rayon vecteur $v_{a'}$.

Donc enfin, si l'on divise l'expression de $\frac{d\pi_{a'}}{dt}$ par celle de $\frac{dv_{a'}}{dt}$, il

viendra

$$\frac{d\pi_{a'}}{dv_{a'}} = \textit{fonction de } v_a,$$

ce qui donnera l'équation polaire de la courbe $\sigma_{a'}$.

On trouverait les deux autres courbes σ_b, σ_c par le simple changement de a en b, et de a en c dans la précédente.

65. On peut remarquer entre ces nouvelles courbes et les premières une différence assez notable. Chacune des trois premières courbes σ_a, σ_b, σ_c est, comme l'herpolhodie σ, toujours renfermée entre deux cercles de rayons finis, dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférences. Mais, des trois courbes $\sigma_{a'}$, $\sigma_{b'}$, $\sigma_{c'}$, il n'y en a qu'une seule qui circule ainsi entre deux circonférences finies; et cette courbe est ou $\sigma_{a'}$ ou $\sigma_{c'}$ selon qu'on a

$$h > b \quad \text{ou} \quad h < b.$$

Pour les deux autres, elles vont porter les sommets *supérieurs* de leurs ondes sur des circonférences de cercle d'un rayon infini. C'est ce qu'il est facile de reconnaître par la simple comparaison du rayon vecteur v_a au rayon vecteur $v_{a'}$; etc.

66. Par les deux variables π_a et v_a, déterminées en fonction du temps t, on aurait la projection du pôle A sur le plan fixe, et comme la hauteur de ce point au-dessus du plan est exprimée par $\sqrt{a^2 - v_a^2}$, on connaîtrait la position du pôle A dans l'espace absolu : et ainsi pour les deux autres pôles B et C du corps. Mais l'intégration de ces expressions $\frac{d\pi_a}{dt}$ et $\frac{dv_a}{dt}$ a les mêmes difficultés et demande l'emploi des mêmes fonctions elliptiques que les précédentes $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ relatives au pôle instantané I de la rotation, etc., etc.

67. Mais je n'irai pas plus loin dans ces détails : nous n'avions ici d'autre but principal que de bien démontrer notre théorie nouvelle de la rotation des corps, et de l'élever à un point de clarté où elle devînt, pour ainsi dire, élémentaire : or il me semble que, par les nouveaux théorèmes et les images variées qui précèdent, cet important objet se trouve entièrement rempli.

J'ajouterai seulement, sur la nature du mouvement de rotation d'un corps libre, ce dernier corollaire : c'est que l'ellipsoïde central du corps est perpétuellement coupé par le plan fixe du couple d'impulsion suivant une ellipse dont la forme varie, mais dont l'aire est constante.

Cela se voit presque immédiatement si l'on considère que tous les rhomboïdes construits sur trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde sont égaux en volume, et qu'il en est de même de tous les cylindres inscrits à ces rhomboïdes; que, par conséquent, de cette infinité de cylindres égaux, ceux qui ont même hauteur, ont des bases équivalentes. Or c'est précisément ce qui a lieu pour les cylindres dont les deux bases parallèles touchent l'ellipsoïde central aux deux bouts de l'axe instantané de rotation.

NOTE SUR DIFFÉRENTES SÉRIES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

On parvient à des formules très-intéressantes, comme, par exemple, au développement de e^{-x} en produit d'une infinité de facteurs, à l'expression de sin x et cos x par des séries dont le calcul ne demande que la multiplication de x par différentes constantes, et encore à plusieurs autres relations curieuses, en cherchant la valeur de $f(1)$, $f(x)$ étant une fonction liée à une autre $F(x)$ par une équation de l'une de ces trois formes :

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots$$

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \ldots$$

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \ldots.$$

Pour y parvenir, nous allons chercher quelle est la loi des séries qui déterminent la valeur de $f(1)$ dans ces trois cas. Commençons par le premier où $f(x)$ et $F(x)$ sont liées par l'équation

$$(1) \quad F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots$$

Il est évident qu'en vertu de cette équation, la valeur cherchée de $f(1)$ sera exprimée par une série de la forme suivante :

$$(2) \quad f(1) = A_1 F(1) + A_2 F(2) + A_3 F(3) + \ldots + A_m F(m) + \ldots$$

où $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ sont des coefficients numériques indépendants des fonctions $f(x)$ et $F(x)$. Pour trouver ces coefficients, supposons

$$f(x) = \frac{1}{r},$$

r étant une quantité quelconque supérieure à 1. Pour cette forme

particulière de $f(x)$, la fonction $F(x)$, d'après l'équation (1), sera déterminée par l'équation

$$F(x) = \frac{1}{x^r} + \frac{1}{(2x)^r} + \frac{1}{(3x)^r} + \frac{1}{(4x)^r} + \frac{1}{(5x)^r} + \frac{1}{(6x)^r} + \ldots,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$F(x) = \frac{1}{x^r} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^r}} \cdots$$

Or, comme cette expression de $F(x)$, conjointement avec

$$f(x) = \frac{1}{x^r},$$

doit vérifier l'équation (2), nous concluons que

$$1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^r}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^r}} \cdots \left(A_1 + \frac{A_2}{2^r} + \frac{A_3}{3^r} + \ldots + \frac{A_m}{m^r} + \ldots\right),$$

et, par conséquent,

$$A_1 + \frac{A_2}{2^r} + \frac{A_3}{3^r} + \ldots + \frac{A_m}{m^r} + \ldots = \left(1-\frac{1}{2^r}\right)\left(1-\frac{1}{3^r}\right)\left(1-\frac{1}{5^r}\right)\left(1-\frac{1}{7^r}\right)\cdots$$

D'après cette équation, et en remarquant que les coefficients A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_m, \ldots$ sont indépendants de r, on conclut qu'en général A_m est égal au coefficient de $\frac{1}{m^r}$ dans le développement du produit

$$\left(1-\frac{1}{2^r}\right)\left(1-\frac{1}{3^r}\right)\left(1-\frac{1}{5^r}\right)\left(1-\frac{1}{7^r}\right)\cdots$$

Or, en examinant ce produit, on s'aperçoit de suite qu'il n'y entre point de termes de la forme $\frac{1}{m^r}$ toutes les fois que m est divisible par un carré; donc, pour de telles valeurs de m, le coefficient A_m sera égal à zéro. Quant aux autres valeurs de m, le coefficient A_m se réduit à 1 lorsque m a un nombre pair de diviseurs premiers, et il est égal à -1 quand le nombre des diviseurs premiers de m est impair. Ainsi nous trouvons la loi de la série (2) qui donne la valeur de $f(1)$ déter-

minée par l'équation

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots.$$

De la même manière nous trouverons que, la fonction $f(x)$ étant déterminée par l'équation

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \ldots,$$

la valeur de $f(1)$ sera égale à

$$B_1 F(1) + B_2 F(2) + B_3 F(3) + B_4 F(4) + \ldots + B_m F(m) + \ldots,$$

où $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots, B_m$ sont les coefficients de $1, \frac{1}{2^r}, \frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \ldots, \frac{1}{m^r}$, dans le développement du produit

$$\left(1 - \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\left(1 - \frac{1}{7^r}\right)\left(1 - \frac{1}{11^r}\right)\ldots.$$

De là nous concluons que

$$B_m = 0$$

quand m est divisible par 2 ou par un carré, et que

$$B_m = +1 \text{ ou } -1,$$

suivant que le nombre des diviseurs premiers de m sera pair ou impair.

En passant au cas de

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \ldots,$$

nous trouvons

$$f(1) = C_1 F(1) + C_2 F(2) + C_3 F(3) + C_4 F(4) + \ldots + C_m F(m) + \ldots,$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots, C_m$ sont égaux aux coefficients de $1, \frac{1}{2^r}, \frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \ldots, \frac{1}{m^r}$ dans le développement du produit

$$\left(1 + \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\left(1 + \frac{1}{7^r}\right)\left(1 + \frac{1}{11^r}\right)\ldots.$$

Donc,

$$C_m = 0$$

dans le cas où m est pair ou divisible par un carré;

$$C_m = 1$$

si m a un nombre pair de diviseurs premiers de la forme $4n+1$, et enfin

$$C_m = -1$$

si le nombre de ces diviseurs est impair.

D'après ce qui vient d'être établi, il est visible que, pour chaque formule connue de l'une de ces trois formes :

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \ldots,$$
$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \ldots,$$
$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \ldots,$$

on aura une formule nouvelle.

Ainsi, de la formule connue

$$\frac{1}{a^x - 1} = a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x} + a^{-4x} + a^{-5x} + a^{-6x} + \ldots$$

nous tirons

$$a^{-x} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a^3-1} - \frac{1}{a^5-1} + \frac{1}{a^6-1} - \ldots$$

Le développement de $\log(1-a^x)$ nous donne une formule qui peut être mise sous cette forme :

$$\frac{\log(1-a^x)}{x} = -\frac{a^{-x}}{x} - \frac{a^{-2x}}{2x} - \frac{a^{-3x}}{3x} - \frac{a^{-4x}}{4x} - \frac{a^{-5x}}{5x} - \frac{a^{-6x}}{6x} - \ldots;$$

d'où nous tirons, en cherchant la valeur de $-\frac{a^x}{x}$ pour $x=1$,

$$a = \frac{\log(1-a)}{1} - \frac{\log(1-a^2)}{2} - \frac{\log(1-a^3)}{3} - \frac{\log(1-a^5)}{5}$$
$$+ \frac{\log(1-a^6)}{6} - \frac{\log(1-a^7)}{7} + \frac{\log(1-a^{10})}{10} - \ldots,$$

et, par conséquent,

$$e^{-a} = \frac{(1-a)(1-a^{10})^{\frac{1}{10}}(1-a^{14})^{\frac{1}{14}}\ldots}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}(1-a^3)^{\frac{1}{3}}(1-a^5)^{\frac{1}{5}}\ldots}$$

En partant de la formule connue

$$\text{arc tang } a^x = a^x - \frac{a^{3x}}{3} + \frac{a^{5x}}{5} + \frac{a^{7x}}{7} - \ldots,$$

qui donne

$$\frac{\text{arc tang } a^x}{x} = \frac{a^x}{x} - \frac{a^{3x}}{3x} + \frac{a^{5x}}{5x} - \frac{a^{7x}}{7x} + \ldots,$$

nous trouvons

$$a = \text{arc tang } a + \frac{1}{3}\text{arc tang } a^3 - \frac{1}{5}\text{arc tang } a^5 + \frac{1}{7}\text{arc tang } a^7 + \ldots.$$

Le développement de $\cos\frac{a}{x}$ en produit de facteurs donne

$$\cos\frac{a}{x} = \left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2 x^2}\right)\left(1 - \frac{4a^2}{3^2\pi^2 x^2}\right)\left(1 - \frac{4a^2}{5^2\pi^2 x^2}\right)\ldots$$

d'où l'on conclut

$$\log\left(\cos\frac{a}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2 x^2}\right) + \log\left(1 - \frac{4a^2}{3^2\pi^2 x^2}\right)$$
$$+ \log\left(1 - \frac{4a^2}{5^2\pi^2 x^2}\right) + \log\left(1 - \frac{4a^2}{7^2\pi^2 x^2}\right) + \ldots.$$

et, d'après cette équation, nous trouvons

$$\log\left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2}\right) = \log(\cos a) - \log\left(\cos\frac{a}{3}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{5}\right)$$
$$- \log\left(\cos\frac{a}{7}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{11}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{13}\right)$$
$$+ \log\left(\cos\frac{a}{15}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{17}\right) - \log\left(\cos\frac{a}{19}\right)$$
$$+ \log\left(\cos\frac{a}{21}\right) - \ldots.$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\pi^2 - 4a}{\pi^2} = \frac{\cos a \cdot \cos\frac{a}{15} \cdot \cos\frac{a}{21}\cdots}{\cos\frac{a}{3} \cdot \cos\frac{a}{5} \cdot \cos\frac{a}{7}\cdots}.$$

Voyons maintenant ce qu'on peut tirer de la valeur connue de la

série

$$\frac{\cos 2\pi\lambda x}{1^2} + \frac{\cos 2.3\pi\lambda x}{3^2} + \frac{\cos 2.5\pi\lambda x}{5^2} + \frac{\cos 2.7\pi\lambda x}{7^2} + \ldots.$$

Pour

$$\lambda x = m \pm \omega,$$

ou m est un entier, ω une quantité positive qui ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, nous trouvons cette série égale à

$$\frac{\pi^2}{8}(1 - 4\omega),$$

expression que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{\pi^2}{8}(1 - 4\{\lambda x\}),$$

en dénotant par le signe $\{\lambda x\}$ la plus petite quantité qu'il faut ajouter à λx ou retrancher de λx pour avoir un nombre entier. Donc on aura

$$\frac{\cos 2\pi\lambda x}{1^2} + \frac{\cos 2.3\pi\lambda x}{3^2} + \frac{\cos 2.5\pi\lambda x}{5^2} + \frac{\cos 2.7\pi\lambda x}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}(1 - 4\{\lambda x\}).$$

En faisant, dans cette formule, $x = 0$, nous trouvons

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2\pi\lambda x}{x^2} = \frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2.3\pi\lambda x}{3x^2} + \frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2.5\pi\lambda x}{5x^2}$$
$$- \frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2.7\pi\lambda x}{7x^2} + \ldots = \frac{1}{x^2}\{\lambda x\}.$$

En cherchant, d'après cette formule, la valeur de $\frac{2}{\pi^2}\frac{1 - \cos 2\pi\lambda x}{x^2}$ pour $x = 1$, nous trouvons

$$\frac{2}{\pi^2}(1 - \cos 2\pi\lambda) = \frac{\{\lambda\}}{1} - \frac{\{3\lambda\}}{3} - \frac{\{5\lambda\}}{5} - \frac{\{7\lambda\}}{7} - \frac{\{11\lambda\}}{11}$$
$$- \frac{\{13\lambda\}}{13} + \frac{\{15\lambda\}}{15} - \ldots.$$

et, par conséquent,

$$\cos 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\{\lambda\}}{1^2} - \dfrac{\{3\lambda\}}{3^2} - \dfrac{\{5\lambda\}}{5^2} - \dfrac{\{7\lambda\}}{7^2} - \dfrac{\{11\lambda\}}{11^2} \\ - \dfrac{\{13\lambda\}}{13^2} + \dfrac{\{15\lambda\}}{15^2} - \ldots\end{array}\right\}$$

Voilà une expression de $\cos 2\pi\lambda$ dont le calcul ne demande que la multiplication de λ par 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15,.... Nous trouverons une expression pareille pour $\sin 2\pi\lambda$, en remplaçant dans la formule précédente λ par $\lambda - \frac{1}{4}$, ce qui donnera la série

$$\sin 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\{\lambda - \frac{1}{4}\}}{1^2} - \dfrac{\{3\lambda - \frac{3}{4}\}}{3^2} - \dfrac{\{5\lambda - \frac{5}{4}\}}{5^2} - \dfrac{\{7\lambda - \frac{7}{4}\}}{7^2} \\ - \dfrac{\{11\lambda - \frac{11}{4}\}}{11^2} - \dfrac{\{13\lambda - \frac{13}{4}\}}{13^2} + \dfrac{\{15\lambda - \frac{15}{4}\}}{15^2} - \ldots\end{array}\right\},$$

qui, par la propriété de la notation $\{\ \}$, se réduira à

$$\sin 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\{\lambda - \frac{1}{4}\}}{1^2} - \dfrac{\{3\lambda + \frac{1}{4}\}}{3^2} - \dfrac{\{5\lambda - \frac{1}{4}\}}{5^2} - \dfrac{\{7\lambda + \frac{1}{4}\}}{7^2} \\ - \dfrac{\{11\lambda + \frac{1}{4}\}}{11^2} - \dfrac{\{13\lambda - \frac{1}{4}\}}{13^2} + \ldots\end{array}\right\}.$$

La même méthode nous conduira aussi aux valeurs des séries

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \ldots$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{29^2} + \ldots$$

$$\frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \frac{1}{23^3} - \frac{1}{29^3} + \ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

d'après celles des suivantes :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \ldots,$$

. . . . . .

. . . . . .

Pour y parvenir, nous remarquons que le produit

$$\frac{1}{1 - \frac{(-1)^m}{3^m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(-1)^m}{7^m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(-1)^m}{11^m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{13^m}} \cdots$$

se réduit à cette série :

$$1 + \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{(-1)^m}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{(-1)^m}{11^m} + \frac{1}{13^m} + \frac{(-1)^m}{15^m} + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\log\left(1 + \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{(-1)^m}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{(-1)^m}{11^m} + \frac{1}{13^m} + \frac{(-1)^m}{15^m} + \ldots\right) \\
&= \log\left(1 - \frac{(-1)^m}{3^m}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{5^m}\right) - \log\left(1 - \frac{(-1)^m}{7^m}\right) \\
&- \log\left(1 - \frac{(-1)^m}{11^m}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{13^m}\right) - \ldots \\
&= \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^{2m}}{3^{2m}} + \frac{1}{3}\frac{(-1)^{3m}}{3^{3m}} + \frac{1}{4}\frac{(-1)^{4m}}{3^{4m}} + \frac{1}{5}\frac{(-1)^{5m}}{3^{5m}} + \ldots \\
&+ \frac{1}{5^m} + \frac{1}{2}\frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{3}\frac{1}{5^{3m}} + \frac{1}{4}\frac{1}{5^{4m}} + \frac{1}{5}\frac{1}{5^{5m}} + \ldots \\
&+ \frac{(-1)^m}{7^m} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^{2m}}{7^{2m}} + \frac{1}{3}\frac{(-1)^{3m}}{7^{3m}} + \frac{1}{4}\frac{(-1)^{4m}}{7^{4m}} + \frac{1}{5}\frac{(-1)^{5m}}{7^{5m}} + \ldots \\
&- \frac{(-1)^m}{11^m} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^{2m}}{11^{2m}} + \frac{1}{3}\frac{(-1)^{3m}}{11^{3m}} + \frac{1}{4}\frac{(-1)^{4m}}{11^{4m}} + \frac{1}{5}\frac{(-1)^{5m}}{11^{5m}} + \ldots \\
&- \frac{1}{13^m} - \frac{1}{2}\frac{1}{13^{2m}} - \frac{1}{3}\frac{1}{13^{3m}} - \frac{1}{4}\frac{1}{13^{4m}} - \frac{1}{5}\frac{1}{13^{5m}} + \ldots
\end{aligned}$$

. . . . . .

. . . . . .

De là nous tirons la formule

$$\log S_m = \Sigma_m + \frac{1}{2}\Sigma_{2m} + \frac{1}{3}\Sigma_{3m} + \frac{1}{4}\Sigma_{4m} + \frac{1}{5}\Sigma_{5m} + \ldots,$$

en dénotant la somme

$$(3)\qquad 1 + \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{(-1)^m}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{(-1)^m}{11^m} + \frac{1}{13^m} + \frac{(-1)^m}{15^m} + \ldots$$

par S_m, et les sommes de la forme

$$(4)\qquad \frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{7^n} + \frac{(-1)^n}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \ldots,$$

en général, par Σ_m. En changeant dans l'équation précédente m en mx, et divisant ensuite tous ses termes par x, nous aurons

$$\frac{1}{x}\log S_{mx} = \frac{1}{x}\Sigma_{mx} + \frac{1}{2x}\Sigma_{2mx} + \frac{1}{3x}\Sigma_{3mx} + \frac{1}{4x}\Sigma_{4mx} + \frac{1}{5x}\Sigma_{5mx} + \ldots,$$

d'où nous tirons, pour la valeur de Σ_m,

$$\Sigma_m = \log S_m - \frac{1}{2}\log S_{2m} - \frac{1}{3}\log S_{3m} - \frac{1}{5}\log S_{5m}$$
$$+ \frac{1}{6}\log S_{6m} - \frac{1}{7}\log S_{7m} - \ldots.$$

Ainsi nous parvenons à déterminer la valeur de la série Σ_m de la forme (1), composée seulement de nombres premiers, au moyen des valeurs des séries S_m, S_{2m}, S_{5m}, S_{6m}, S_{7m},... de la forme (3), composées de tous les nombres impairs. Dans le cas particulier de

$$m = 1,\ 2,\ 3,$$

la formule que nous venons de trouver donnera

$$\Sigma_1 = \log S_1 - \frac{1}{2}\log S_2 - \frac{1}{3}\log S_3 - \frac{1}{5}\log S_5 + \frac{1}{6}\log S_6 - \frac{1}{7}\log S_7 + \ldots.$$

$$\Sigma_2 = \log S_2 - \frac{1}{2}\log S_4 - \frac{1}{3}\log S_6 - \frac{1}{5}\log S_{10} + \frac{1}{6}\log S_{12} - \frac{1}{7}\log S_{14} + \ldots.$$

$$\Sigma_3 = \log S_3 - \frac{1}{2}\log S_6 - \frac{1}{3}\log S_9 - \frac{1}{5}\log S_{15} + \frac{1}{6}\log S_{18} - \frac{1}{7}\log S_{21} + \ldots$$

Mais on sait que

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \ldots = \frac{\pi}{32},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \frac{1}{13^4} + \frac{1}{15^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96},$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \frac{1}{13^5} - \frac{1}{15^5} + \ldots = \frac{5\pi^5}{1536},$$

$$S_6 = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{13^6} + \frac{1}{15^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{960},$$

$$S_7 = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \frac{1}{13^7} - \frac{1}{15^7} + \ldots = \frac{61\pi^7}{184320},$$

$$S_8 = 1 - \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} - \frac{1}{11^8} + \frac{1}{13^8} - \frac{1}{15^8} + \ldots = \frac{277\pi^8}{8257536},$$

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{9^{10}} + \frac{1}{11^{10}} + \frac{1}{13^{10}} + \frac{1}{15^{10}} + \ldots = \frac{31\pi^{10}}{2903040}.$$

. . . . . .

Donc, d'après les formules précédentes, nous aurons

$$\Sigma_1 = \log\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{3}\log\frac{\pi^3}{32} - \frac{1}{5}\log\frac{5\pi^5}{1536} + \frac{1}{6}\log\frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{7}\log\frac{61\pi^7}{184320}$$
$$+ \frac{1}{10}\log\frac{31\pi^{10}}{2903040} - \ldots,$$

$$\Sigma_2 = \log\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{3}\log\frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{5}\log\frac{31\pi^{10}}{2903040} - \ldots,$$

$$\Sigma_3 = \log\frac{\pi}{32} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{3}\log\frac{277\pi^8}{8257536} - \ldots.$$

ce qui donne

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \ldots = -0,33498\ldots$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \ldots = 0,20224\ldots$$

$$\Sigma_3 = -\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \ldots = -0,03225\ldots.$$

NOUVELLE ÉTUDE SUR LA THÉORIE DES FORCES;

PAR M. P. SAINT-GUILHEM,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

I.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LA COMPOSITION DES FORCES QUI SOLLICITENT UN CORPS SOLIDE.

1. Si les forces P_1, P_2, P_3,..., appliquées à divers points d'un corps solide, sont transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point du corps, leur résultante P sera ce que nous nommerons la *résultante géométrique* des forces P_1, P_2, P_3,...; l'une quelconque de celles-ci sera le *complément* des autres *par rapport* à la force P.

Nous dirons que la droite D est la *résultante* des droites D_1, D_2, D_3,..., lorsque la droite D, considérée comme une force, sera la résultante des droites D_1, D_2, D_3,..., considérées aussi comme des forces.

On démontre facilement (*voir* la Note I, page 372) qu'une force quelconque P peut toujours se décomposer en deux autres, F et G, situées toutes deux dans le plan qui passe par la force P et par un point arbitraire o, l'une appliquée immédiatement au point o, l'autre suivant une droite arbitraire distante du point o d'une quantité égale à l'unité.

La force G a pour mesure, quelle que soit sa direction, le produit de la force P par sa distance au point o et tend à tourner autour du point o dans le même sens que la force P; la force F n'est autre chose que le complément de la force G par rapport à la force P.

Nous nommerons la force G le *moment* de la force P *autour* du point o; le point o, autour duquel on peut imaginer que le moment

de la force P tend à faire tourner son point d'application, sera le *centre du moment* de la force P; le plan passant par la force P et par le point o sera le *plan du moment* de la force P.

Composition directe des moments et de leurs compléments.

2. Soient P_1, P_2, P_3,... des forces quelconques appliquées à divers points d'un corps solide; G_1, G_2, G_3,... leurs moments respectifs autour d'un point arbitraire o; F_1, F_2, F_3,... les compléments de ces moments par rapport aux forces P_1, P_2, P_3,... appliqués au point o.

Les moments G_1, G_2 pouvant affecter des directions arbitraires dans leurs plans, concevons qu'ils soient appliqués au même point suivant deux droites perpendiculaires à l'intersection de leurs plans; ils se composeront en une seule force G', laquelle, étant située à l'unité de distance du point o, se confondra avec son propre moment; les compléments F_1, F_2 se composeront également en une seule force F' qui sera évidemment le complément de G_1 et G_2 ou de G' par rapport à la résultante géométrique de P_1, P_2.

Appliquons maintenant les moments G' et G_3 au même point perpendiculairement à l'intersection de leurs plans; ils se composeront en un seul G''; les compléments F', F_3 (dont les directions et les intensités ont changé en même temps que les directions de G' et G_3) se composeront en un seul F'' qui sera le complément de G'' par rapport à la résultante géométrique de P_1, P_2, P_3.

En procédant toujours de même, on arrive à un dernier moment, qui sera le *moment résultant* du système, et à un dernier complément, qui sera le complément du moment résultant par rapport à la résultante géométrique du système.

Composition des moments par leurs axes.

3. Si, par le point o, on élève une perpendiculaire au plan du moment de la force P, cette perpendiculaire sera l'*axe du moment* de la force P; la *direction* de cet axe sera telle, qu'un spectateur, qui aurait les pieds sur le plan et le dos appuyé contre l'axe, verrait la force P dirigée de sa gauche à sa droite; sa *grandeur* sera la grandeur même du moment de la force.

De cette définition on déduit immédiatement ces deux corollaires :

Corollaire I. *L'angle des axes de deux moments est toujours égal (jamais son supplément) à l'angle des moments eux-mêmes appliqués au même point perpendiculairement à l'intersection de leurs plans.*

Corollaire II. *L'axe du moment résultant de deux forces est la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des moments de ces forces.*

A l'aide de ces deux corollaires, on établit sans peine la relation suivante :

Quelles que soient les forces appliquées à un corps solide, l'axe du moment résultant est la résultante des axes des moments du système.

Détermination algébrique de l'axe du moment résultant.

4. Posons les deux lemmes suivants :

Lemme I. *Si l'on projette sur un plan plusieurs forces appliquées au même point et leur résultante, la projection de la résultante sera la résultante des projections.*

En effet, un parallélogramme se projette toujours sur un plan suivant un parallélogramme; donc le principe est vrai pour deux forces et leur résultante, donc il est général.

Lemme II. *A une force donnée on peut toujours substituer ses trois projections sur trois plans rectangulaires quelconques et une quatrième force appliquée à l'intersection commune des trois plans, égale, parallèle et contraire à la force donnée.*

En effet, soient o un point arbitraire; ox, oy, oz trois axes rectangulaires menés par ce point; P la force donnée. Si l'on suppose d'abord la force P dirigée suivant la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur l'axe des x, elle pourra évidemment être remplacée par ses projections sur les plans des zx et des xy : d'ailleurs cette force étant parallèle au plan des yz et dirigée vers l'axe des x, elle se projettera sur le plan des xy dans sa véritable grandeur suivant une droite dirigée vers le point o; donc, dans ce cas, le principe est vrai.

En second lieu, si la force P a une direction quelconque, elle pourra toujours être décomposée en trois autres suivant les trois perpendiculaires abaissées de son point d'application sur les axes des x, des y, des z: le principe sera vrai pour chacune d'elles; donc il sera vrai pour leur résultante, puisque la projection de celle-ci sur chaque plan est la résultante des projections des composantes.

Nota. Le même raisonnement démontre que la force P peut toujours être remplacée par ses projections sur les trois plans coordonnés et par leur complément, par rapport à la force P, appliqué au point o.

5. Cela posé, soient o le centre des moments; ox, oy, oz trois axes rectangulaires menés par ce point; remplaçons chacune des forces données par ses projections sur les plans des yz, zx, xy et par une force égale, parallèle et contraire appliquée au point o; supposons que les forces situées dans les plans des yz, zx, xy aient les axes de leurs moments positifs ou négatifs, suivant qu'ils coïncident avec la partie positive ou négative de l'axe des x, des y, des z; supposons, en outre, que les moments eux-mêmes soient positifs ou négatifs suivant que leurs axes sont positifs ou négatifs; qu'ils soient positifs sur le plan des yz lorsqu'ils tendent à tourner, autour du point o, des y positives vers les z positives; que, par conséquent, ils soient positifs sur le plan des zx lorsqu'ils tendent à tourner des z positives vers les x positives; sur le plan des xy lorsqu'ils tendent à tourner des x positives vers les y positives.

Si l'on appelle P_1 une des forces données appliquée au point m_1; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point m_1; X_1, Y_1, Z_1 les composantes de P_1 parallèles aux axes des x, y, z, il est facile de voir que, quelle que soit la position du point m_1, les moments des projections de la force P_1 sur les plans des yz, zx, xy seront respectivement

$$(1)\qquad Z_1 y_1 - Y_1 z_1, \quad X_1 z_1 - Z_1 x_1, \quad Y_1 x_1 - X_1 y_1.$$

Ces trois formules sont comprises dans la suivante :

Si l'on considère x_1, y_1, z_1 comme formant un groupe de lettres tournantes, en sorte que x_1 précède y_1, y_1 précède z_1 et z_1 précède x_1, le moment de la projection de la force P_1 sur le plan coordonné paral-

lèle à deux quelconques des coordonnées du point m_1, est égal à la première des deux coordonnées, multipliée par la composante de P_1 *parallèle à la seconde, moins la seconde multipliée par la composante de* P_1 *parallèle à la première.*

Si l'on désigne maintenant par L, M, N les composantes de l'axe du moment résultant, parallèles aux axes des x, des y, des z, on aura évidemment

$$(2)\quad \begin{cases} L = \Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1), \\ M = \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1), \\ N = \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1), \end{cases}$$

la sommation indiquée par le signe Σ s'étendant à tous les points du corps.

Comment varie le moment résultant lorsqu'on déplace le centre des moments.

6. Si l'on désigne par o' le nouveau centre des moments; par L_0, M_0, N_0 ce que deviennent L, M, N lorsqu'on transporte toutes les forces du système parallèlement à elles-mêmes au point o'; par L', M', N' ce que deviennent les mêmes quantités lorsqu'on prend pour centre des moments le point o' et que les axes coordonnés sont transportés parallèlement à eux-mêmes en ce point, on aura évidemment, en vertu des relations (2),

$$L = L' + L_0, \quad M = M' + M_0, \quad N = N' + N_0,$$

d'où l'on déduit immédiatement le théorème suivant :

Si par un point arbitraire de l'espace on mène trois droites A, A′, B′ *égales et parallèles, la première à l'axe du moment résultant relatif au point* o; *la deuxième à l'axe du moment résultant relatif au point* o'; *la troisième à l'axe du moment de la résultante géométrique du système appliqué au point* o' *par rapport au point* o, *la droite* A *sera la diagonale du parallélogramme construit sur* A′ *et* B′ (*voir* la Note II, page 373).

De là les conséquences suivantes :

1°. Si l'on déplace le centre des moments sur une parallèle à la

résultante géométrique, l'axe du moment résultant conservera la même grandeur et la même direction; en effet, dans cette hypothèse, la droite B′ est toujours nulle : donc, etc.

2°. Quel que soit le déplacement du centre des moments, l'axe du moment résultant, estimé suivant la résultante géométrique du système, conservera toujours la même grandeur et la même direction; car la droite qui joint les extrémités de A et A′ est parallèle à la droite B′, laquelle est nécessairement perpendiculaire à la résultante géométrique.

3°. Parmi tous les axes des moments résultants relatifs aux divers points de l'espace, les plus petits sont parallèles à la résultante géométrique du système et égaux à la projection de l'axe du moment résultant relatif à un point quelconque sur cette résultante.

Le lieu des centres correspondants aux axes minima s'obtient aisément; en effet, si A′ est l'un de ces axes, A et A′ étant connus en grandeur et en direction, B′ l'est également; B′ étant connu, si l'on construit une force R égale et parallèle à la résultante géométrique et dont le moment par rapport au point o ait pour axe une droite égale et parallèle à la droite B′, la droite suivant laquelle agit la force R sera évidemment le lieu cherché. Cette droite est ce que l'on nomme l'*axe central*.

4°. Si A coïncide avec l'axe central, en appelant ρ la distance du point o' à l'axe central, on aura

$$B' = R\rho,$$

et, par conséquent,

$$A'^2 = A^2 + R^2\rho^2.$$

Conditions d'équilibre d'un corps solide sollicité par des forces quelconques.

7. Soient G le moment résultant des forces données par rapport à un point arbitraire o; F son complément appliqué au point o par rapport à la résultante géométrique du système; R cette résultante.

Les forces F et G ne pouvant être, par leur nature, directement opposées, on doit admettre comme un axiome qu'elles ne peuvent se

faire équilibre, à moins qu'elles ne soient séparément nulles, c'est-à-dire que l'on n'ait

$$F = 0, \quad G = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$R = 0, \quad G = 0.$$

De ces deux conditions, on déduit facilement les six équations connues.

II.

RELATIONS ENTRE LES VITESSES DES DIVERS POINTS D'UN CORPS SOLIDE EN MOUVEMENT.

8. Nous appelons *milieu* un espace indéfini, fixe ou mobile, déterminé par des points géométriques dont chacun est situé à des distances invariables de tous les autres. Le milieu est *absolu* ou *relatif* suivant qu'il est en repos ou en mouvement.

Un milieu est *doué d'une vitesse donnée*, lorsque tous les points de ce milieu sont doués d'une vitesse égale et parallèle à la vitesse donnée.

Un point matériel est *doué à la fois* des vitesses a, b, c,..., k lorsque ce point, considéré comme situé à la fois dans autant de milieux qu'il possède de vitesses, est supposé doué de la vitesse a dans le premier milieu; ce premier milieu doué de la vitesse b dans un deuxième milieu; ainsi de suite; enfin l'avant-dernier milieu doué de la vitesse k dans le dernier milieu, qui est un milieu absolu.

De là on déduit immédiatement ce principe :

Si un point matériel est doué à la fois des vitesses a, b, c,..., k, il est doué réellement dans l'espace d'une seule vitesse représentée en grandeur et en direction par la résultante des vitesses a, b, c,..., k composées entre elles comme des forces.

Un corps solide est *doué à la fois* des mouvements A, B, C,..., K lorsque ce corps, considéré comme situé à la fois dans autant de milieux qu'il possède de mouvements, est supposé doué du mouve-

ment A dans le premier milieu: le premier milieu du mouvement B dans le deuxième milieu; etc.

Lorsqu'un corps solide est doué d'un mouvement de rotation autour d'un axe, nous supposerons que cet axe a une *direction positive* et une *direction négative;* la direction positive sera telle, qu'un spectateur qui serait placé le long de l'axe, les pieds du côté négatif, la tête du côté positif, verrait le mouvement du corps s'effectuer de sa gauche à sa droite.

Si sur l'axe de rotation et à partir d'une origine arbitraire on prend, du côté positif, une longueur Ω égale à la vitesse angulaire du corps, nous dirons que la portion de l'axe ainsi déterminée est la *caractéristique* Ω du mouvement de rotation.

Le *moment de la caractéristique par rapport à un point* sera le moment de la force représentée par cette caractéristique.

Première relation. *Si un corps solide se meut autour d'un point fixe, le mouvement qui a lieu peut être considéré pendant la durée de chaque instant comme un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.*

Nous avons donné dans le tome Ier de ce Journal, page 310, une démonstration géométrique très-simple de cette relation; nous ne la reproduirons pas (*voir* la Note III, page 374).

Deuxième relation. *Un corps solide en mouvement peut toujours être considéré comme doué d'un mouvement hélicoïdal le long d'un axe fixe ou mobile.*

En effet, si nous concevons le corps plongé dans un milieu doué d'un mouvement égal et parallèle à celui d'un quelconque de ses points m, il est évident que le corps tournera dans ce milieu autour du point m comme autour d'un point fixe. Soient v la vitesse du point m dans l'espace; D l'axe instantané dans le milieu relatif. Décomposons la vitesse v en deux autres v_1, v_2, l'une suivant la droite D, l'autre perpendiculaire à cette droite; menons par la droite D un plan perpendiculaire à v_2; tirons dans ce plan une droite D′ parallèle à la droite D et douée dans le milieu relatif d'une vitesse de rotation v' égale et contraire à v_2. Un point quelconque m' de cette droite

sera doué dans l'espace de la vitesse v et de la vitesse v', ou des trois vitesses v_1, v_2 et v'. Mais v' est égal et contraire à v_2; donc le point m n'est doué que de la vitesse v_1 dirigée suivant la droite D′ : il en est de même de tous les autres points de la droite D′. D'ailleurs chaque point de la droite D est doué dans l'espace d'une vitesse égale et parallèle à v, ou, ce qui revient au même, d'une vitesse égale et parallèle à v_1 suivant la droite D′, et d'une vitesse de rotation égale à v_2 autour de la même droite; donc, etc.

Nota. Chaque point du corps détermine un axe qui jouit de la même propriété; par conséquent, il y a une infinité d'axes le long desquels le corps se meut à chaque instant d'un mouvement héliçoïdal.

Troisième relation. *Si un corps solide est doué à la fois de plusieurs mouvements de rotation dont les caractéristiques* Ω_1, Ω_2, Ω_3,... *convergent vers un même point, le corps sera doué d'un simple mouvement de rotation dont la caractéristique sera la résultante* Ω *des caractéristiques* Ω_1, Ω_2, Ω_3.....

En effet, soit o le point de concours des caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,...; menons par ce point un plan perpendiculaire à la résultante Ω; prenons dans ce plan un point arbitraire m situé à l'unité de distance du point o. Le point m sera doué à la fois des vitesses ω_1, ω_2, ω_3,... telles, qu'en les considérant comme des moments, leurs axes seront les caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,...; la vitesse résultante aura pour axe Ω; donc le point m sera doué réellement, autour de l'axe Ω, d'un mouvement de rotation dont la caractéristique sera Ω. Cela étant vrai pour tous les points situés à l'unité de distance du point o dans le plan perpendiculaire à Ω mené par ce point, cela est vrai pour le corps tout entier; donc, etc.

Quatrième relation. *Si un corps solide est doué à la fois de plusieurs mouvements de rotation dont les caractéristiques* Ω_1, Ω_2, Ω_3,... *aient des situations quelconques dans l'espace, on pourra toujours le considérer comme doué seulement de deux mouvements : d'un mouvement de translation dont la vitesse serait représentée en grandeur et en direction par l'axe du moment résultant des caractéristiques re-*

latif à un point arbitraire m, et d'un mouvement de rotation dont la caractéristique serait représentée par la résultante géométrique des caractéristiques, appliquée au point m.

En effet, les caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,... pourront évidemment se composer entre elles exactement comme si elles représentaient des forces; par conséquent, elles pourront se réduire à deux F et G, l'une ayant pour origine le point m, l'autre dirigée suivant une droite distante du point m d'une quantité égale à l'unité, celle-ci étant le moment résultant des caractéristiques par rapport au point m; celle-là le complément de la caractéristique G par rapport à la résultante géométrique R des caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,....

La caractéristique F pourra être décomposée en deux : l'une $-$ G égale, parallèle et contraire à la caractéristique G, l'autre égale et parallèle à la résultante R. On aura alors deux caractéristiques G, $-$ G égales, parallèles et opposées, et une troisième caractéristique R appliquée au point m. Or il est facile de voir que les deux rotations G, $-$ G produisent un simple mouvement de translation. En effet, soient m' un point de la caractérique $-$ G autre que le point m, m'' un point quelconque de la caractéristique G; il est visible qu'en vertu des deux rotations simultanées G, $-$ G, les trois points m, m', m'' auront des vitesses égales et parallèles à l'axe du moment de la caractéristique G relatif au point m; donc le plan déterminé par les caractéristiques G, $-$ G, et, par conséquent, le corps tout entier aura un mouvement de translation dont la vitesse sera égale et parallèle à l'axe du moment résultant des caractéristiques Ω_1, Ω_2, Ω_3,... relatif au point m; d'ailleurs il a un mouvement de rotation dont la caractéristique est R; donc, etc.

Nota. Si l'on prend, suivant les indications du n° **6**, l'origine m de manière que l'axe du moment résultant des caractéristiques soit parallèle à la résultante géométrique de celle-ci, le corps aura un mouvement héliçoïdal le long d'un axe parallèle à cette résultante; la vitesse de translation sera alors un minimum, comme nous l'avons vu.

III.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE EN TENANT COMPTE DES FORCES QUI LE SOLLICITENT.

9. Un point matériel qui est soumis à des forces et à des liaisons quelconques peut toujours être considéré comme libre et soumis à une force unique : nous nommerons cette force unique la *force totale* qui sollicite le point matériel ; la résultante de toutes les forces qui sollicitent un point matériel sera la *force motrice*.

Si l'on décompose la force totale en deux, l'une suivant la tangente à la courbe décrite, l'autre suivant la normale, la première sera la *force tangentielle*, la seconde la *force infléchissante* ou *centripète*. Si l'on désigne par m la masse du point matériel que l'on considère ; par v sa vitesse au bout du temps t ; par ρ le rayon de courbure du petit arc décrit dans le temps dt ; la force tangentielle aura pour mesure $\frac{m\,dv}{dt}$: elle sera positive ou négative suivant qu'elle agira dans le sens du mouvement ou en sens contraire ; la force infléchissante aura pour mesure $\frac{mv^2}{\rho}$: elle tendra à *infléchir* le mouvement vers le centre de courbure.

Si l'on imagine une force appliquée à un point matériel suivant la direction de sa vitesse et ayant pour mesure sa masse multipliée par sa vitesse, on aura ce que l'on nomme la *quantité de mouvement* du point matériel.

Relation qui existe entre l'axe du moment résultant des forces infléchissantes et l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

10. Soient o le point fixe ; m la masse d'un point quelconque du corps ; P et Q sa force infléchissante et sa quantité de mouvement ; F et G les axes des moments des forces P et Q relatifs au point o ; F_r l'axe du moment résultant des forces infléchissantes ; G_r l'axe du moment résultant des quantités de mouvement ; soient d'ailleurs Ω la caracté-

ristique du mouvement de rotation; ρ_0, ρ les distances du point m au point fixe et à la caractéristique; h_0 la projection de ρ_0 sur la caractéristique. On aura, comme on sait, les relations suivantes :

$$P = m\Omega^2\rho, \quad Q = m\Omega\rho, \quad F = m\Omega^2\rho h_0, \quad G = m\Omega\rho\rho_0.$$

Cela posé, menons par le point o trois axes rectangulaires ox, oy, oz tels, que l'axe oz coïncide avec la caractéristique du mouvement; que le point m soit dans l'angle xoz ou dans l'angle xoz', oz' étant le prolongement de oz; que le corps tourne des x positives vers les y positives.

Il est visible que l'axe F sera toujours situé dans le plan de xy et coïncidera avec l'axe des y négatives ou des y positives [*] suivant que le point m sera dans l'angle xoz ou dans l'angle xoz'; que la projection de l'axe G sur le plan des xy coïncidera, dans les mêmes hypothèses, avec l'axe des x négatives ou des x positives. Donc l'axe F se trouvera toujours sur le plan des xy à 90 degrés à droite de la projection de l'axe G sur le même plan: d'ailleurs cette projection est égale à

$$m\Omega\rho \cdot \rho_0 \frac{h_0}{\rho_0} = m\Omega\rho h_0 = F \cdot \frac{1}{\Omega};$$

donc, si l'on désigne par g_r la projection de G_r sur le plan des xy, cette projection sera située à 90 degrés à gauche de F_r, et l'on aura

$$g_r = F_r \cdot \frac{1}{\Omega} \quad \text{ou} \quad F_r = g_r \cdot \Omega.$$

Donc F_r est parallèle à la vitesse de l'extrémité de l'axe G_r et égale à cette vitesse; donc, *lorsqu'un corps solide tourne autour d'un point fixe, l'axe du moment résultant des forces infléchissantes est représenté en grandeur et en direction par la vitesse du point du corps situé à l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement, le centre des moments étant le point fixe.*

---

* Suivant nos conventions, le moment d'une force tend toujours à tourner de gauche à droite autour de son axe.

Détermination de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

11. Soient Ω la caractéristique du mouvement; m la masse d'un point quelconque du corps; ρ sa distance à la caractéristique; x, y, z ses trois coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires menés par le plan fixe et assujettis aux conditions exprimées au n° **5**; p, q, r les trois composantes de la caractéristique suivant les axes des x, y, z.

Si l'on imagine que l'on ait mené par le point m une droite égale, parallèle et contraire à la caractéristique, il est visible que l'axe du moment de cette droite considérée comme une force sera égal et parallèle à la vitesse du point m; d'où il suit que les projections de la vitesse du point m sur les axes des x, y, z seront respectivement, d'après la formule du n° **5**, $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$; que l'axe du moment de la quantité de mouvement du point m aura pour projections sur les mêmes axes les quantités

$$m[(py - qx)y - (rx - pz)z],$$
$$m[(qz - ry)z - (py - qx)x],$$
$$m[(rx - pz)x - (qz - ry)y].$$

Si nous posons, pour abréger,

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = \mathrm{A}, \quad \Sigma m(z^2 + x^2) = \mathrm{B}, \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = \mathrm{C},$$
$$\Sigma myz = \mathrm{D}, \qquad \Sigma mzx = \mathrm{E}, \qquad \Sigma mxy = \mathrm{F},$$

la sommation indiquée par le signe Σ s'étendant à tous les points du corps, et si nous désignons par L, M, N les projections de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sur les axes des x, y, z, on aura

$$1)\quad \mathrm{L} = \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r, \quad \mathrm{M} = \mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p, \quad \mathrm{N} = \mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q.$$

Ces trois projections suffisent pour déterminer à chaque instant la grandeur et la direction de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

Comment varie le moment d'inertie du corps par rapport à un axe dont la position change sans cesser de passer par le point fixe.

12. Si l'on appelle k le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe instantané, $k\Omega$ sera l'axe du moment résultant des quantités de mouvement estimé suivant la caractéristique, et l'on aura la relation

$$k\Omega = \mathrm{L}\frac{p}{\Omega} + \mathrm{M}\frac{q}{\Omega} + \mathrm{N}\frac{r}{\Omega},$$

ou bien, en observant que $\Omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$,

$$(2) \qquad k(p^2 + q^2 + r^2) = \mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r.$$

Si dans cette relation on considère p, q, r comme les coordonnées d'un point variable de la surface représentée par l'équation

$$\mathrm{L}p + \mathrm{M}q + \mathrm{N}r = 1,$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 - 2\mathrm{D}qr - 2\mathrm{E}rp - 2\mathrm{F}pq = 1;$$

et si l'on désigne, en outre, par δ la longueur du rayon vecteur mené du point fixe au point p, q, r, on aura

$$k\delta^2 = 1;$$

d'où résulte cette relation très-simple :

Le moment d'inertie du corps relatif à un rayon vecteur quelconque de la surface (3) *est en raison inverse du carré de ce rayon vecteur.*

Le rayon vecteur ayant toujours, comme le moment d'inertie, une valeur finie, on voit que la surface (3) est nécessairement un ellipsoïde. Cet ellipsoïde se nomme l'*ellipsoïde central*.

L'ellipsoïde central jouit de deux propriétés très-remarquables qui se démontrent très-aisément à l'aide des formules précédentes :

1°. p, q, r étant les coordonnées d'un point variable de la surface (3), si l'on prend ces quantités proportionnelles aux composantes de la caractéristique suivant les axes des x, y, z, les quantités L, M, N seront proportionnelles aux cosinus des angles que l'axe du plan

tangent au point p, q, r de la surface (3) fait avec les axes des x, y, z; donc *le plan tangent à l'ellipsoïde central au point où l'axe instantané rencontre cette surface est perpendiculaire à l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.*

2°. On verra plus loin que lorsque le corps n'est sollicité par aucune force, la projection de la caractéristique sur l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est une quantité constante; donc, dans les mêmes hypothèses que précédemment,

$$Lp + Mq + Nr = H,$$

H étant une quantité fixe. Si δ est la longueur du rayon vecteur qui aboutit au point p, q, r de l'ellipsoïde central, on aura évidemment

$$\frac{1}{\delta^2} = k = \frac{H}{\Omega^2} \quad \text{ou} \quad \Omega = \delta\sqrt{H};$$

d'où l'on voit que *la vitesse angulaire du corps est proportionnelle à la longueur du rayon vecteur qui coïncide avec l'axe instantané.*

Ces propriétés sont plus curieuses que réellement utiles.

13. On appelle *axes principaux du corps* les axes principaux de l'ellipsoïde central. Il résulte de cette définition que, si les axes coordonnés sont les axes principaux du corps, on a

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0;$$

par conséquent,

$$L = Aq, \quad M = Aq, \quad N = Cr.$$

relations qu'on peut traduire ainsi :

La projection de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sur l'un quelconque des axes principaux du corps est égale au moment d'inertie du corps relatif à ce dernier axe multiplié par la projection de la caractéristique sur le même axe.

Remarquons que si le corps tourne autour d'un axe principal, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement coïncide avec l'axe de rotation, et l'axe du moment résultant des forces infléchissantes est nul. Ces propriétés pourraient servir de définition aux axes principaux; la première fournirait immédiatement les moyens de déterminer ces axes.

Détermination de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.

14. Soient toujours p, q, r les composantes de la caractéristique suivant les axes des x, y, z; L, M, N les composantes de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement suivant les mêmes axes coordonnés; ϖ l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

Si l'on imagine qu'on ait appliqué au point ϖ une force égale, parallèle et contraire à la caractéristique, l'axe du moment de cette force sera évidemment égal et parallèle à la vitesse du point ϖ; par conséquent, il coïncidera en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces infléchissantes, ainsi que nous l'avons vu au n° **10**. Si donc nous appliquons au point ϖ une force dont les composantes suivant les axes des x, des y, des z soient $-p$, $-q$, $-r$, les coordonnées du point ϖ étant L, M, N, l'axe du moment de la force appliquée au point ϖ aura pour projections sur les axes des x, y, z les quantités $Nq - Mr$, $Lr - Np$, $Mp - Lq$. Ces quantités seront, par conséquent, les projections de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.

Si les axes coordonnés sont les axes principaux du corps, les projections de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes seront respectivement

$$(C - B)\,qr, \quad (A - C)\,rp, \quad (B - A)\,pq.$$

Équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

15. Dans tout système de forces il y a équivalence entre les forces motrices et les forces totales, ou bien entre les forces motrices d'une part, les forces tangentielles et infléchissantes d'autre part. Donc, dans le cas dont il s'agit, lorsque les points d'application des forces sont invariablement liés entre eux, le moment résultant des forces motrices par rapport à un axe quelconque [*] est égal à la somme des moments

[*] Nous appelons, suivant l'usage, *moment d'une force par rapport à une droite* le moment de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à la droite, le plan et la droite passant par le centre des moments.

résultants des forces tangentielles et infléchissantes par rapport au même axe.

Évaluons chacun de ces moments au bout du temps t par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz menés par le point fixe o; nous supposerons que ces trois axes sont fixes dans le corps, et assujettis aux conditions exprimées au n° 5.

Moments résultants des forces motrices. Nous avons enseigné, dans le § Ier, à évaluer le moment résultant d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide par rapport à une droite donnée; nous pouvons donc supposer que les moments résultants des forces motrices qui sollicitent le corps au bout du temps t par rapport aux axes ox, oy, oz sont connus et représentés par P, Q, R.

Moments résultants des forces tangentielles. Si l'on appelle L, M, N les moments résultants des quantités de mouvement au bout du temps t par rapport aux axes ox, oy, oz, il est évident que les moments résultants des forces tangentielles par rapport aux mêmes axes seront exprimés respectivement par $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$, $\frac{dN}{dt}$.

Moments résultants des forces infléchissantes. Si l'on appelle p, q, r les composantes de la caractéristique au bout du temps t, les moments résultants des forces infléchissantes par rapport aux axes ox, oy, oz seront exprimés respectivement, comme nous l'avons vu au n° 14, par les quantités $Nq - Mr$, $Lr - Np$, $Mp - Lq$.

Cela posé, on aura, conformément à ce qui a été dit, les équations suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{dL}{dt} + Nq - Mr, \\ Q = \dfrac{dM}{dt} + Lr - Np, \\ R = \dfrac{dN}{dt} + Mp - Lq. \end{cases}$$

Ces équations, jointes aux équations (1), feront connaître p, q, r.

Déterminons maintenant la position des axes ox, oy, oz mobiles avec le corps par rapport à trois axes fixes ox_1, oy_1, oz_1; à cet effet,

remarquons que le corps tournant autour de l'axe instantané pendant l'instant dt avec une certaine vitesse angulaire occupe à la fin de cet instant, par rapport à l'un quelconque des axes fixes ox_1, oy_1, oz_1, la même position que si le corps était resté fixe et que l'axe fixe eût tourné autour de l'axe instantané avec une vitesse de rotation égale et contraire à celle qu'avait le corps.

Donc, si l'on prend sur l'un des axes ox_1, oy_1, oz_1 un point quelconque m', et qu'on mène par ce point une droite égale et parallèle à la caractéristique, l'axe du moment de cette droite (considérée comme une force) sera égal et parallèle à la vitesse de ce point; donc, si l'on appelle x', y', z' les coordonnées du point m' par rapport aux axes ox, oy, oz, on aura les relations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = ry' - qz', \\ \dfrac{dy'}{dt} = pz' - rx', \\ \dfrac{dz'}{dt} = qx' - pq'. \end{cases}$$

Au moyen de ces relations on aura la position de chacun des axes ox_1, oy_1, oz_1 par rapport aux trois axes principaux, et, par conséquent, la position de chacun des axes principaux par rapport aux trois axes fixes ox_1, oy_1, oz_1. Les équations (5) étaient déjà connues, mais on n'y était parvenu que par des combinaisons d'équations plus ou moins pénibles.

Examen du cas où l'on a à la fois $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

16. Dans le cas particulier où l'on a à la fois

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

c'est-à-dire dans le cas où les forces motrices se font équilibre autour du point fixe, le problème qui a pour objet la détermination du mouvement du corps peut se résoudre plus simplement que par les équations (1), (4) et (5).

En effet, en prenant pour les axes mobiles ox, oy, oz les axes

principaux du corps, on a d'abord

$$(6)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{cases}$$

On déduit immédiatement de ces équations les deux suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H, \end{cases}$$

H et K désignant deux constantes arbitraires.

La première de ces relations exprime que l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est constant en grandeur. Il est facile de voir, à priori, que cet axe est constant non-seulement en grandeur, mais encore en direction. En effet, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement se compose à chaque instant avec l'axe du moment résultant des forces totales pour former l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui a lieu l'instant d'après. Or, puisque les forces motrices se font équilibre, les forces totales se font aussi équilibre; donc l'axe du moment résultant de ces dernières est nul à chaque instant; donc l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est constant en grandeur et en direction. On l'appelle, par ce motif, l'*axe invariable*. Le plan mené par le point fixe perpendiculairement à l'axe invariable est le *plan invariable*.

La seconde des relations (7), mise sous la forme

$$\frac{Ap}{K}\cdot p + \frac{Bq}{K}\cdot q + \frac{Cr}{K}\cdot r = \frac{H}{K},$$

exprime que la projection de la caractéristique sur l'axe invariable est une quantité constante [*], comme nous l'avons dit au n° **12**.

---

[*] Cette relation peut aussi se démontrer directement. En effet, puisque les forces totales se font équilibre, l'axe du moment résultant des forces tangentielles est égal et contraire à l'axe du moment résultant des forces infléchissantes; or ce dernier est per-

Les équations (7), combinées avec une des équations (6), donneront les valeurs de p, q, r. On déduit, en effet, des équations (7) :

$$(8)\quad \begin{cases} q = \pm\sqrt{\dfrac{K^2 - CH + (C - A)Ap^2}{(B - C).B}}, \\ r = \pm\sqrt{\dfrac{K^2 - BH + (B - A)Ap^2}{(C - B).C}}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans la première des équations (6), on la met sous la forme

$$(9)\quad dt = \frac{\pm\sqrt{BCA}\,dp}{\sqrt{[Ap^2(A - C) + CH - K^2][Ap^2(B - A) + C^2 - BH]}}.$$

Au moyen des Tables des fonctions elliptiques on trouvera facilement la valeur de p, qui correspond, dans cette équation, à une valeur donnée de t; connaissant p, les équations (8) donneront les valeurs de q et r.

Les équations (6) et les valeurs initiales de p, q, r feront cesser complétement l'ambiguïté du double signe $\pm$ dans les équations (8) et (9).

Il reste à trouver la position des axes principaux au bout du temps t. A cet effet, menons par le point fixe trois axes fixes dans l'espace ox_1, oy_1, oz_1, dont le premier coïncide avec l'axe invariable; appelons θ l'angle que l'axe ox fait avec l'axe ox_1, c'est-à-dire avec l'axe invariable; ψ l'angle que la projection de l'axe ox sur le plan des y_1, z_1 fait avec l'axe des y_1, cet angle étant compté des y_1 positives vers les z_1 positives. Il est évident que ces deux angles détermineront complétement la position de l'axe ox.

---

pendiculaire à la caractéristique; donc l'autre l'est aussi; donc on a la relation

$$A\,dp.p + B\,dq.q + C\,dr.r = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$Ap.dp + Bq.dq + Cr.dr = 0.$$

Donc la composante élémentaire dont les projections sur les axes principaux sont dp, dq, dr, est perpendiculaire à l'axe du moment résultant des quantités de mouvement; donc la projection de la caractéristique sur l'axe invariable est constante.

On sait déjà que l'axe ox_1 fait avec l'axe ox un angle dont le cosinus est $\frac{Ap}{K}$; donc

$$\cos\theta = \frac{Ap}{K}. \tag{10}$$

Il reste à trouver l'angle ψ. Or, si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point m_1 situé sur l'axe ox par rapport aux axes ox_1, oy_1, oz_1, on aura évidemment

$$\psi = \text{arc tang}\frac{z_1}{y_1};$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}}{y_1^2 + z_1^2}. \tag{11}$$

Exprimons les deux termes de cette fraction au moyen de p, q, r.

1°. Le terme $y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}$ n'est autre chose que la projection de l'axe du moment de la vitesse du point m_1 sur l'axe des x_1; or, si le point m_1 est situé sur l'axe ox à une distance du point fixe égale à l'unité, il est visible que l'axe du moment de la vitesse du point m_1 se trouve à l'intersection du plan des yz et du plan mené par l'axe ox et la caractéristique; que sa grandeur est

$$\Omega\sqrt{1 - \frac{p^2}{\Omega^2}} = \sqrt{\Omega^2 - p^2};$$

que, par conséquent, il coïncide en grandeur et en direction avec la projection de la caractéristique sur le plan des yz : donc les projections de l'axe du moment de la vitesse du point m_1 sur les axes ox, oy, oz seront respectivement égales à o, q, r. D'ailleurs l'axe ox_1 fait avec les axes ox, oy, oz des angles dont les cosinus sont $\frac{Ap}{K}$, $\frac{Bq}{K}$, $\frac{Cr}{K}$; donc on a

$$y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt} = \frac{Bq^2 + Cr^2}{K}.$$

2°. On a

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \quad x_1 = \frac{Ap}{K};$$

donc

$$y_1^2 + z_1^2 = \frac{K^2 - A^2p^2}{K^2}.$$

Cela posé, la relation (11) devient

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Bq^2 + Cr^2}{K^2 - A^2p^2} \cdot K,$$

ou bien

$$(12) \qquad d\psi = \frac{H - Ap}{K^2 - A^2p^2} \cdot K\,dt.$$

Si l'on remplace dt par sa valeur prise dans la formule (9), cette équation fera connaître, au moyen des Tables des fonctions elliptiques, la valeur de ψ correspondante à une valeur de p, et, par conséquent, à une valeur donnée de t.

A l'exemple de M. Poinsot et de quelques savants professeurs, nous appellerons généralement l'angle qu'une droite passant par le point fixe fait avec l'axe invariable, la *nutation* de cette droite; l'angle que la projection de cette droite sur le plan invariable fait avec un axe fixe situé dans ce plan, la *précession* de la droite. (Il serait peut-être plus convenable d'appeler ces quantités les *distances polaire et azimutale de la droite.*)

Ces définitions admises, désignons par θ', θ'', θ''', Θ les nutations des axes ox, oy, oz et de la caractéristique; par ψ', ψ'', ψ''', Ψ les précessions des mêmes droites comptées à partir de l'axe des y_1 et déterminons successivement ces huit quantités; on aura

$$(13) \qquad \cos\theta' = \frac{Ap}{K}, \quad \cos\theta'' = \frac{Bq}{K}, \quad \cos\theta''' = \frac{Cr}{K}.$$

Multipliant ces cosinus respectivement par $\frac{p}{\Omega}$, $\frac{q}{\Omega}$, $\frac{r}{\Omega}$ et ajoutant les produits, la somme représentera évidemment la nutation de la caractéristique; donc

$$(14) \qquad \cos\Theta = \frac{H}{K\Omega}.$$

Les raisonnements à l'aide desquels on a établi l'équation (12) conduisent aux relations suivantes :

$$(15) \quad d\psi' = \frac{H - Ap}{K - A^2p^2} K\,dt, \quad d\psi'' = \frac{H - Bq}{K^2 - B^2q^2} K\,dt, \quad d\psi''' = \frac{H - Cr}{K^2 - C^2r^2} K\,dt.$$

Mettant pour dt sa valeur en p, ou q, ou r, ces équations font connaître, à l'aide des fonctions elliptiques, les quantités ψ', ψ'', ψ'''.

Pour trouver la valeur de Ψ, on considérera la pyramide triangulaire qui a pour arêtes les axes des x_1, des x et la caractéristique; alors la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne sans calcul

$$\cos(\Psi - \psi') = \frac{\frac{P}{\Omega} - \cos\theta' \cos\Theta}{\sin\theta' \sin\Theta} = \frac{K^2 - AH}{AH} \cot\theta' \cot\Theta.$$

On trouverait de même

$$\cos(\Psi - \psi') = \frac{K^2 - BH}{BH} \cot\theta' \cot\Theta.$$

Divisant ces deux dernières équations l'une par l'autre et posant

$$\frac{B(K^2 - AH)\cot\theta'}{A(K^2 - BH)\cot\theta''} = \delta,$$

on aura

$$16 \qquad \operatorname{tang}\Psi = -\frac{\cos\psi' - \delta\cos\psi''}{\sin\psi' - \delta\sin\psi''}.$$

La précession de l'axe instantané peut être déterminée d'une autre manière qui mérite d'être remarquée.

Nous avons vu que l'axe du moment résultant des forces infléchissantes est toujours représenté en grandeur et en direction par la vitesse de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement; donc il est perpendiculaire, dans le cas qui nous occupe, à l'axe instantané et à l'axe invariable; donc il coïncide avec l'intersection de deux plans menés par le point fixe, l'un perpendiculaire à l'axe instantané, l'autre perpendiculaire à l'axe invariable; donc la précession de l'axe instantané a pour mesure l'angle que l'axe du moment résultant des forces infléchissantes fait avec sa position initiale, en supposant que cette position coïncide avec l'axe des y_1.

Appelons p_0, q_0, r_0, Ω_0 les valeurs initiales de p, q, r, Ω, et observons que

$$(A - B)^2 p^2 q^2 + (A - C)^2 p^2 r^2 + (B - C)^2 q^2 r^2$$
$$= (A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)^2,$$

nous aurons, d'après les valeurs que nous avons trouvées pour les projections de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes sur les axes ox, oy, oz,

$$\cos\Psi = \frac{(B-C)^2 q_0 r_0 qr + (C-A)^2 r_0 p_0 rp + (A-B)^2 p_0 q_0 pq}{\sqrt{(K^2\Omega^2 - H^2)(K^2\Omega_0^2 - H^2)}}.$$

Cette valeur montre qu'*on peut toujours au moyen des quantités p, q, r, par conséquent au moyen d'une seule intégration, déterminer, à une époque quelconque, la position de l'axe instantané dans l'espace et dans le corps.*

IV.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN MILIEU RELATIF.

17. Le mouvement absolu d'un point matériel plongé dans un milieu relatif peut être considéré comme composé à chaque instant de deux mouvements : du *mouvement d'entraînement*, c'est-à-dire du mouvement qu'aurait le point matériel s'il restait en coïncidence avec le point du milieu relatif qu'il occupe actuellement, et du *mouvement relatif*, c'est-à-dire du mouvement qu'il a dans ce milieu. La vitesse et la force totale correspondantes au mouvement d'entraînement seront la *vitesse* et la *force d'entraînement;* la vitesse et la force totale correspondantes au mouvement relatif seront la vitesse et la force *relatives*.

Lorsqu'un point matériel est en mouvement dans un milieu relatif, si plusieurs quantités a, a', a'',..., b, b', b'',... changent avec la position de ce point, mais les unes a, a', a'',... avec le mouvement d'entraînement seulement; les autres b, b', b'',... avec le mouvement relatif seulement; nous désignerons la dérivée totale d'une fonction u de ces quantités par Du; la dérivée par rapport à a, a', a'',... qui ne changent qu'avec le mouvement d'entraînement, par $D_e u$; la dérivée par rapport à b, b', b'',... qui ne changent qu'avec le mouvement relatif, par $D_r u$; la dérivée du second ordre suivant les indices e et r, par $D^2_{e,r} u$.

D'après ces notations, on aura, quel que soit u,

$$Du = D_e u + D_r u, \tag{17}$$

$$D^2 u = D^2_{e,e} u + D^2_{r,r} u + 2 D^2_{e,r} u. \tag{18}$$

Cela posé, soient x, y, z les coordonnées d'un point matériel m par rapport à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace. Si l'on remplace u, dans les équations (17) et (18), successivement par x, y, z, les trois équations provenant de l'équation (17) montrent que la vitesse absolue du point m est la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative, ce que l'on savait à priori; les trois équations provenant de l'équation (18) montrent que si l'on désigne par F la force totale absolue du point m; par F_e la force d'entraînement; par F_r la force relative; par F′ la force qui a pour projections sur les axes des x, des y, des z; les quantités

$$2D^2_{e,r}\,x,\quad 2D^2_{e,r}\,y,\quad 2D^2_{e,r}\,z;$$

la force F est la résultante des trois forces F_e, F_r et F′.

Voyons ce que c'est que F′. Soient o' un point arbitraire du milieu relatif; $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ trois axes rectangulaires fixes dans le milieu relatif menés par le point o'; x', y', z' les coordonnées du point m au bout du temps t par rapport à ces axes; a, b, c les cosinus des angles que ces mêmes axes font avec l'axe des x; α l'ordonnée du point o' relative au plan des y, z. On aura évidemment la relation

$$x = \alpha + ax' + by' + cz',$$

de laquelle on déduira, en observant que α, a, b, c ne dépendent que du mouvement d'entraînement, tandis que x', y', z' ne dépendent que du mouvement relatif,

$$D^2_{e,r}\,x = D_e\,a\,D_r\,x' + D_e\,b\,D_r\,y' + D_e\,c\,D_r\,z'$$

On aurait une relation semblable par rapport à y et une autre par rapport à z.

Or, si l'on tire du point o' une droite parallèle à la vitesse relative du point m et égale au double de cette vitesse, l'extrémité m_1 de cette droite aura pour coordonnées les quantités

$$2D_r\,x',\quad 2D_r\,y',\quad 2D_r\,z';$$

donc, si x_1 est la valeur de x correspondante au point m_1, on aura

$$D_e\,x_1 = D_e\,\alpha + 2D_r\,x'\,D_e\,a + 2D_r\,y'\,D_e\,b + 2D_r\,z'\,D_e\,c,$$

et, par conséquent,

$$2\,D^2_{e,r}\,x = D_e\,x_1 - D_e\,\alpha.$$

Mais si l'on observe que le mouvement d'entraînement du point m_1 peut être considéré comme composé d'un mouvement de translation égal et parallèle à celui du point o' et d'un certain mouvement de rotation autour de ce point, on en conclura que la force F′ n'est autre chose que la vitesse de rotation du point m_1 autour du point o'. On a donc le théorème suivant :

La force totale absolue qui sollicite le point m est la résultante de trois forces : de la force d'entraînement, de la force relative et d'une troisième force égale et parallèle à la vitesse de rotation d'un certain point m_1 appartenant au milieu relatif, autour d'un point arbitraire o' de ce milieu, le point m_1 étant lié aux points o' et m par la condition que $o'm_1$ soit parallèle à la vitesse relative du point m et égale au double de cette vitesse.

A l'aide de ce théorème on aura immédiatement la force totale qui sollicite le point m dans le milieu relatif lorsque les trois autres forces seront connues.

NOTE I.

Sur la définition des moments par rapport à un point.

Soient O un point arbitraire d'un corps solide ; P une force appliquée à l'un des points du corps ; D une droite arbitraire située dans le plan qui passe par le point O et par la force P ; P′ la force P transportée parallèlement à elle-même au point m où sa direction vient rencontrer la droite D.

Le point m étant lié invariablement au point d'application de la force P, il est évident que la force P′ sera équivalente à la force P ; or la force P′ peut se décomposer, à l'aide du parallélogramme des forces, en deux autres F et G, l'une dirigée suivant la droite mO, l'autre suivant la droite D : la première sera le complément de la force G par rapport à P, et pourra être considérée comme agissant au point O. Pour déterminer l'intensité de la force G et le sens dans lequel elle agit, on observera que la droite qui joint les extrémités des forces G et P′ étant parallèle à mO, les deux triangles qui ont pour sommet commun le point O et pour bases les forces G et P′, ou bien les forces G et P, sont équivalents ; d'où il suit que les forces G et P sont en raison in-

verse de leurs distances au point O : il est évident, d'ailleurs, que la force G tend toujours à tourner autour du point O dans le même sens que la force P.

Donc la force P peut toujours se décomposer en deux autres F et G : l'une appliquée au point O, l'autre suivant la droite D : la première est le complément de la force G par rapport à la force P ; la seconde, comparée à la force P, est en raison inverse de sa distance au point O et tend à tourner dans le même sens autour de ce point.

Nous avons supposé que la direction de la force P rencontrait la droite D ; si elle lui était parallèle, la même loi de décomposition subsisterait encore, car cette loi existe, quelque petit que soit l'angle de la force P avec la droite D, par conséquent lorsque cet angle est égal à zéro. On peut, au reste, le démontrer directement d'une manière très-facile à l'aide d'une double décomposition ; nous ne nous y arrêterons pas.

Lorsqu'on suppose la droite D distante du point O d'une quantité égale à l'unité, la force G est égale au produit de la force P par sa distance au point O. Dans cette hypothèse, nous appelons la force G le *moment* de la force P *par rapport* au point O.

Nous rentrons ainsi dans la notion des moments, telle que l'avait conçue Galilée. « Galilée, dit Lagrange dans la première section de la *Mécanique analytique*, entend » par moment d'un poids ou d'une puissance appliquée à une machine, l'effort, l'ac- » tion, l'énergie, l'*impetus* de cette puissance pour mouvoir la machine, de manière » qu'il y ait équilibre entre deux puissances lorsque leurs moments pour mouvoir la » machine en sens contraires sont égaux. Je ne vois pas, ajoute Lagrange, pourquoi » on a abandonné cette notion pour y en substituer une autre qui exprime seulement » la valeur du moment dans certains cas. »

Nota. La notion des moments, considérés comme efforts, peut facilement être appliquée à un système assujetti à des liaisons complètes quelconques ; elle donne lieu à une démonstration très-simple du principe des vitesses virtuelles. (*Voir* les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse*, année 1850.)

NOTE II.

Sur une autre démonstration de la loi suivant laquelle varie l'axe du moment résultant lorsqu'on déplace le centre des moments.

Soient o et o' l'ancien et le nouveau centre des moments ; m un point auquel est appliquée la force P ; m' un point tel, que la figure $oo'mm'$ soit un parallélogramme ayant om pour diagonale ; P′, Q′ deux forces égales et parallèles à la force P appliquées aux points m', o'.

Si du point o on abaisse des perpendiculaires sur les forces P, P′, Q′, ces perpendiculaires feront évidemment entre elles les mêmes angles que les axes des moments de ces forces, et seront proportionnelles à ces axes. D'ailleurs, ces perpendiculaires

étant les projections sur un même plan des droites om, om', oo' qui forment la diagonale et les côtés d'un parallélogramme, il est clair que la première de ces perpendiculaires est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres; donc l'axe du moment de la force P est la résultante des axes des moments des forces P′, Q′

Mais l'axe du moment de la force P′ est égal et parallèle à l'axe du moment de la force P par rapport au point o'; l'axe du moment de la force Q′ est l'axe du moment de la force P transportée parallèlement à elle-même au point o' par rapport au point o.

Donc, en considérant à la fois toutes les forces qui sollicitent un corps solide, on aura le théorème suivant :

Si par un point quelconque de l'espace on mène trois droites A, A′, B′, *l'une égale et parallèle à l'axe du moment résultant du système relatif au point o, la seconde, etc.*

NOTE III.

Sur une démonstration de l'existence de l'axe instantané.

La démonstration citée dans le texte peut être modifiée comme il suit : Soient o le point fixe; m un point quelconque du corps; M un plan mené par ce point perpendiculairement à sa vitesse; il passera par le point o, puisque le point m décrit un arc de cercle autour du point o. Démontrons que la vitesse d'un point quelconque m' du plan M est aussi perpendiculaire à ce plan; il suffit pour cela, puisque cette vitesse est déjà perpendiculaire à om', de prouver qu'elle est perpendiculaire à une seconde droite mm' située dans le plan M. Or, quel que soit le mouvement du point m' dans le premier instant, puisque ce point reste à une distance constante du point m, on peut le considérer comme doué de deux mouvements à la fois : d'un mouvement de translation égal et parallèle à celui du point m, et d'un certain mouvement de rotation autour de ce point. Ces deux mouvements infiniment petits étant l'un et l'autre perpendiculaires à mm', le mouvement résultant est nécessairement perpendiculaire à mm'.

Donc, si la vitesse d'un point appartenant à un plan mené par le point o est perpendiculaire à ce plan, il en sera de même des vitesses de tous les autres points du plan. De là il suit que, si par deux points quelconques du corps dont les vitesses ne sont pas parallèles, on mène deux plans perpendiculaires à ces vitesses, l'intersection de ces plans sera immobile pendant un instant.

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE LEGENDRE;

PAR M. ANT. WINCKLER,
Professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe.

Legendre a trouvé (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1787, page 358) que le calcul d'un triangle sphérique, dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, se ramène au calcul d'un triangle rectiligne des mêmes côtés, en retranchant le tiers de l'excès sphérique de chacun de ses angles.

Les démonstrations connues que Lagrange, dans le VIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et M. Gauss, dans le tome VI du présent Journal, page 273, ont donné de ce remarquable et utile théorème, peuvent être remplacées avantageusement, je crois, par la démonstration élémentaire et plus rapide que voici.

Soient a, b, c les côtés et α, β, γ les angles d'un triangle sphérique sur une sphère dont le rayon $= 1$; désignons par α^0, β^0, γ^0 les angles d'un triangle rectiligne des mêmes côtés : ces côtés a, b, c sont regardés comme des quantités très-petites du premier ordre, et le théorème de Legendre suppose qu'on néglige les quantités du quatrième ordre. Or, dans la formule

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\,\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin\frac{a+b+c}{2}\,\sin\frac{-a+b+c}{2}}},$$

développez en séries les sinus, et faites les multiplications, en négligeant les termes du quatrième ordre et des ordres supérieurs :

vous aurez

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a+b-c}{a+b+c}\,\frac{a-b+c}{a+b+c}}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2-2bc)}{1-\frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2-2bc)}},$$

ou

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha^0}{2}\sqrt{1+\frac{1}{3}bc},$$

et, si l'on extrait la racine,

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tang}\frac{\alpha^0}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{6}bc\right),$$

d'où il suit

$$\sin\frac{\alpha-\alpha^0}{2} = \frac{1}{6}bc\,.\sin\frac{\alpha^0}{2}\cos\frac{\alpha^0}{2}.$$

Il résulte de là que la différence $\alpha - \alpha^0$ est du second ordre. Partant, si l'on pose

$$\alpha - \alpha^0 = \frac{1}{6}bc\sin\alpha^0,$$

cette équation sera exacte aux termes près du quatrième ordre. A ce degré d'approximation, on aura de même

$$\beta - \beta^0 = \frac{1}{6}ac\sin\beta^0, \quad \gamma - \gamma^0 = \frac{1}{6}ab\sin\gamma^0.$$

Mais les trois quantités $bc\sin\alpha^0$, $ac\sin\beta^0$, $ab\sin\gamma^0$ sont égales entre elles, en vertu du rapport qui lie les côtés d'un triangle rectiligne aux sinus des angles opposés. Donc les différences $\alpha - \alpha^0$, $\beta - \beta^0$, $\gamma - \gamma^0$ sont aussi égales; et comme leur somme fait l'excès sphérique, chacune d'elles en est le tiers: de là, comme conséquence immédiate, le théorème de Legendre.

MÉMOIRE

Sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers;

PAR M. E.-E. KUMMER,
Professeur de Mathématiques à l'Université de Breslau, en Silésie.

Dans l'état actuel de la science, on entend généralement par nombre complexe une fonction entière, à coefficients entiers, des racines irrationnelles d'une ou de plusieurs équations algébriques dont les coefficients sont également des nombres entiers. Le produit de tous les nombres complexes qu'on déduit d'un d'entre eux en changeant les racines des équations qu'il contient, étant une fonction symétrique de ces racines, sera toujours délivré de toute irrationnalité. Ce produit, qu'on appelle la *norme* du nombre complexe, sera donc un nombre entier; et, par conséquent, tout nombre complexe sera facteur irrationnel d'un nombre entier. De même, si l'on prend les coefficients du nombre complexe pour des indéterminés, la norme représentera une forme homogène d'un certain degré, du genre de celles qui sont décomposables en facteurs linéaires. La théorie des nombres complexes revient, au fond, à la théorie de ces formes, et, à cet égard, elle fait partie d'une des plus belles branches de l'Arithmétique supérieure. C'est sous ce point de vue que M. Lejeune-Dirichlet a fait des recherches très-générales sur les formes de degrés quelconques qui dépendent des normes des nombres complexes. Il a jeté les fondements de cette théorie en découvrant les propriétés générales de ces formes; mais, malheureusement, il n'en a publié jusqu'à présent que quelques-uns des résultats principaux, en ne donnant que des notions générales sur les principes nouveaux dont il s'est servi pour y parvenir. D'un autre côté, la théorie des nombres complexes peut être con-

sidérée comme la théorie de la décomposition des nombres en facteurs irrationnels, et c'est sous ce point de vue qu'elle a un grand intérêt, aussi bien en elle-même que pour les applications nombreuses et importantes qu'on en a faites dans plusieurs questions relatives à l'Arithmétique et à l'Algèbre supérieure.

Je ne traiterai, dans ce Mémoire, que les nombres complexes dont les irrationnalités sont les racines imaginaires de l'unité ou de l'équation binôme

$$\alpha^\lambda = 1,$$

genre spécial de nombres complexes, mais duquel l'importance pour la théorie générale est comparable à celle qu'il faut attribuer à la solution de l'équation binôme pour les équations algébriques les plus générales. La théorie de ces nombres complexes a été depuis longtemps le sujet de mes recherches, que j'ai publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* et dans le Journal de M. Crelle [*]. En reprenant ici cette matière, j'ai en vue de compléter et de réunir la substance principale de ces divers Mémoires pour en former un Traité entier et continu qui puisse servir de base sûre à des recherches ultérieures dans cette partie de la théorie des nombres. J'ajouterai aussi deux applications des nombres complexes, dont l'une se rapporte à la théorie de la division du cercle, l'autre à la démonstration du dernier théorème de Fermat.

§ I.

Définitions et théorèmes préliminaires.

Les nombres complexes dont nous nous occuperons dans ce Mémoire sont des fonctions rationnelles et entières, à coefficients entiers, d'une racine imaginaire de l'équation

$$\alpha^\lambda = 1,$$

λ étant un nombre premier impair. A l'aide de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

[*] Rappelons aussi les premiers essais, déjà très-intéressants, que M. Kummer avait consignés dans un Mémoire imprimé d'abord à Breslau, en 1844, et inséré depuis au tome XII du présent Journal. (J. Liouville.)

qui contient toutes les racines imaginaires de l'équation $\alpha^\lambda = 1$, un nombre complexe $f(\alpha)$ est toujours réductible à la forme

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-2}\alpha^{\lambda-2},$$

$a, a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda-2}$ étant des nombres entiers. On démontre aisément que cette réduction ne pourrait être effectuée que d'une seule manière; car, si l'on avait

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-2}\alpha^{\lambda-2}$$

et

$$f(\alpha) = b + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots + b_{\lambda-2}\alpha^{\lambda-2},$$

on en conclurait

$$a - b + (a_1 - b_1)\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2 + \ldots + (a_{\lambda-2} - b_{\lambda-2})\alpha^{\lambda-2} = 0,$$

équation qui ne peut pas subsister à cause de l'irréductibilité de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0.$$

En prenant pour α successivement toutes les racines différentes, que nous représenterons comme puissances de l'une d'elles par α, α^2, $\alpha^3, \ldots, \alpha^{\lambda-1}$, on obtient les $\lambda - 1$ nombres complexes

$$f(\alpha), \quad f(\alpha^2), \quad f(\alpha^3), \ldots, \quad f(\alpha^{\lambda-1}),$$

que nous appellerons *nombres complexes conjugués*. Deux nombres conjugués, tels que $f(\alpha^n)$ et $f(\alpha^{-n})$, dont les racines sont réciproques, seront appelés *nombres complexes réciproques*.

Le produit de tous les nombres conjugués

$$f(\alpha), \quad f(\alpha^2), \quad f(\alpha^3), \ldots, \quad f(\alpha^{\lambda-1}),$$

étant une fonction symétrique de toutes les racines de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

se réduit à un nombre rationnel et entier qui, suivant M. Lejeune-Dirichlet, sera appelé la *norme* du nombre complexe $f(\alpha)$, et qui sera

désigné par la lettre N, en sorte qu'on ait

$$\mathrm{N} f(\alpha) = f(\alpha) \cdot f(\alpha^2) \cdot f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda-1}).$$

Il suit immédiatement de la définition :

1°. Que les nombres conjugués ont tous la même norme

$$\mathrm{N} f(\alpha^h) = \mathrm{N} f(\alpha);$$

2°. Que la norme du produit de deux ou de plusieurs nombres complexes est égale au produit des normes des facteurs

$$\mathrm{N}[f(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)] = \mathrm{N} f(\alpha) \cdot \mathrm{N} \varphi(\alpha).$$

La norme du nombre complexe

$$f(\alpha) = a + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-2} \alpha^{\lambda-2}$$

est une fonction homogène du degré $\lambda - 1$ des $\lambda - 1$ nombres indéterminés a, a_1, a_2,..., $a_{\lambda-2}$. Donc la théorie des nombres complexes est, au fond, la même que la théorie de ces formes, et, pour cette raison, elle donne lieu à des questions semblables à celles qu'on connaît de la théorie des formes quadratiques. Le développement effectif de la norme comme forme du degré $\lambda - 1$ étant très-pénible, nous pourrons nous en dispenser en la représentant toujours comme produit de facteurs conjugués; d'ailleurs la discussion de ces formes nous paraît moins simple que celle des nombres complexes eux-mêmes, qui en sont les facteurs, les éléments, pour ainsi dire, et dont l'analogie avec les nombres entiers est frappante, comme on le verra dans la suite.

L'addition et la soustraction des nombres complexes n'offrent aucune difficulté, car les deux nombres complexes

$$f(\alpha) = a + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-2} \alpha^{\lambda-2}$$

et

$$\varphi(\alpha) = b + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \ldots + b_{\lambda-2} \alpha^{\lambda-2},$$

donnent immédiatement la somme et la différence

$$f(\alpha) \pm \varphi(\alpha) = a \pm b + (a_1 \pm b_1) \alpha + (a_2 \pm b_2) \alpha^2 + \ldots$$
$$+ (a_{\lambda-2} \pm b_{\lambda-2}) \alpha^{\lambda-2}.$$

Le résultat de la multiplication des nombres $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ sera toujours un nombre $\psi(\alpha)$ de la forme

$$\psi(\alpha) = c + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

qui, au moyen de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

se réduira à

$$\psi(\alpha) = c - c_{\lambda-1} + (c_1 - c_{\lambda-1})\alpha + (c_2 - c_{\lambda-1})\alpha^2 + \ldots$$
$$+ (c_{\lambda-2} - c_{\lambda-1})\alpha^{\lambda-2},$$

et l'on aura

$$c = ab + a_{\lambda-2}b_1 + a_{\lambda-3}b_2 + \ldots + a_2b_{\lambda-2},$$
$$c_1 = a_1b + ab_1 + a_{\lambda-2}b_2 + \ldots + a_3b_{\lambda-2},$$
$$c_2 = a_2b + a_1b_1 + ab_2 + \ldots + a_4b_{\lambda-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{\lambda-1} = a_{\lambda-2}b_1 + a_{\lambda-3}b_2 + \ldots + a_1b_{\lambda-2}.$$

L'addition de ces équations donne

$$c + c_1 + c_2 + \ldots + c_{\lambda-1}$$
$$= (a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-2})(b + b_1 + b_2 + \ldots + b_{\lambda-2}),$$

et la somme des coefficients du produit $\psi(\alpha)$ dans sa forme réduite, étant égale à

$$c - c_1 + c_2 + \ldots + c_{\lambda-1} - \lambda c_{\lambda-1},$$

on en conclut ce théorème :

La somme des coefficients du produit de deux nombres complexes est congrue au produit des sommes des coefficients des facteurs pour le module λ.

Il est clair que ce théorème subsiste également pour un nombre quelconque de facteurs. En l'appliquant aux facteurs conjugués dont se compose la norme du nombre

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-2}\alpha^{\lambda-2},$$

pour lesquels les sommes des coefficients sont toutes égales, on aura

$$\mathrm{N}f(\alpha) \equiv (a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-2})^{\lambda-1} \pmod{\lambda}.$$

On en conclut :

Pour que la norme d'un nombre complexe soit divisible par λ, *il faut et il suffit que la somme des coefficients de ce nombre soit divisible par* λ.

Mais si cette somme n'est pas divisible par λ, on a, en vertu du théorème de Fermat,

$$(a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-2})^{\lambda-1} \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{N} f(\alpha) \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Il suit de là cet autre théorème :

La norme de tout nombre complexe dont la somme des coefficients n'est pas divisible par λ, *est de la forme linéaire* $m\lambda + 1$.

La division des nombres complexes se réduit immédiatement au cas où le diviseur est un nombre entier non complexe. En effet, $\varphi(\alpha)$ étant le dividende et $f(\alpha)$ le diviseur, on les multipliera tous les deux par $f(\alpha^2).f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{\lambda-1})$ et l'on aura le diviseur $\mathrm{N} f(\alpha)$, qui sera entier. Pour que $\varphi(\alpha)$ soit divisible par $f(\alpha)$, il faut que le quotient soit égal à un nombre entier complexe $\psi(\alpha)$. L'équation

$$\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} = \psi(\alpha)$$

donne

$$\frac{\varphi(\alpha) f(\alpha^2) f(\alpha^3) \ldots f(\alpha^{\lambda-1})}{\mathrm{N} f(\alpha)} = \psi(\alpha),$$

d'où l'on conclut que, dans le produit

$$\varphi(\alpha).f(\alpha^2).f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{\lambda-1}),$$

développé et réduit à la forme

$$c + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{\lambda-2}\alpha^{\lambda-2},$$

tous les coefficients $c, c_1, c_2, \ldots, c_{\lambda-2}$ doivent être divisibles par $\mathrm{N} f(\alpha)$, et cette condition étant remplie, on aura effectivement $\varphi(\alpha)$ divisible par $f(\alpha)$.

§ II.

Théorie des unités complexes.

Les nombres complexes dont la norme est égale à l'unité sont appelés *unités complexes*. Ces unités, toujours infinies en nombre, excepté le seul cas de $\lambda = 3$, jouent un rôle principal dans toutes les questions sur les nombres complexes, et c'est pour cette raison que la discussion des unités doit être mise à la tête de cette théorie.

D'abord, il est visible que

$$\pm 1, \quad \pm \alpha, \quad \pm \alpha^2, \ldots, \quad \pm \alpha^{\lambda-1}$$

satisfont à la définition des unités; nous les appellerons des *unités simples*. De plus, il est aisé de voir que le nombre complexe

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{r-1} = \frac{1-\alpha^r}{1-\alpha},$$

r désignant un nombre entier quelconque, non divisible par λ, a pour norme la fraction

$$\frac{(1-\alpha^r)(1-\alpha^{2r})(1-\alpha^{3r})\ldots[1-\alpha^{(\lambda-1)r}]}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots(1-\alpha^{r-1})},$$

qui se réduit à l'unité. Donc $\frac{1-\alpha^r}{1-\alpha}$ sera aussi une unité complexe, et, puisqu'une puissance entière quelconque et le produit de plusieurs unités sont toujours une unité, il est clair que

$$\pm \alpha^h \left(\frac{1-\alpha^r}{1-\alpha}\right)^m \left(\frac{1-\alpha^s}{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}\right)^p \ldots$$

sera une unité pour toutes les valeurs entières des exposants m, n, p, etc. On a ainsi, en général, une infinité d'unités différentes. Mais ce qui constitue dans cette théorie la question la plus importante et en même temps la plus délicate, c'est la représentation de *toutes* les unités sous la forme la plus simple.

Nous allons aborder cette question par la démonstration du théorème :

Chaque unité complexe, divisée par sa réciproque, donne pour quotient une unité simple.

C'est-à-dire $E(\alpha)$ étant une unité quelconque, on a toujours

$$\frac{E(\alpha)}{E(\alpha^{-1})} = \pm \alpha^{h}.$$

D'abord il est visible que ce quotient est un entier complexe. Nous pourrons donc poser

$$\frac{E(\alpha)}{E(\alpha^{-1})} = \varphi(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}.$$

et nous aurons

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}) = 1$$

En effectuant la multiplication, on trouve

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}) = A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}.$$

$$\begin{aligned}
A &= a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{\lambda-1}^2,\\
A_1 &= aa_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{\lambda-1}a,\\
A_2 &= aa_2 + a_1a_3 + a_2a_4 + \ldots + a_{\lambda-1}a_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{\lambda-1} &= aa_{\lambda-1} + a_1a + a_2a_1 + \ldots + a_{\lambda-1}a_{\lambda-2},
\end{aligned}$$

et, en prenant la somme de ces coefficients,

$$A + A_1 + A_2 + \ldots + A_{\lambda-1} = (a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1})^2$$

De l'équation

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^{-1}) = A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \ldots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1} = 1$$

il suit aussi

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_{\lambda-1} \quad \text{et} \quad A = A_1 + 1,$$

et de là

$$1 + \lambda A_1 = (a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1})^2$$

ou

$$\pm 1 \equiv a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1} \pmod{\lambda};$$

et, puisque le nombre complexe $\varphi(\alpha)$ ne change pas de valeur quand on augmente ou diminue tous ses coefficients d'une même quantité, il est évident qu'on peut prendre

$$a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\lambda-1} = \pm 1,$$

et de là on a

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \ldots, \quad A_{\lambda-1} = 0,$$
$$A = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{\lambda-1}^2 = 1.$$

Mais la somme des carrés des nombres entiers $a, a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda-1}$ ne pourra jamais être égale à l'unité, à moins qu'un quelconque d'entre eux ne soit égal à l'unité et tous les autres égaux à zéro. On a donc effectivement

$$\frac{E(\alpha)}{E(\alpha^{-1})} = \varphi(\alpha) = \pm \alpha^h.$$

On conclut facilement de ce théorème, que toutes les unités complexes peuvent être décomposées en deux facteurs, dont l'un soit une unité simple α^h, et l'autre une fonction des périodes à deux termes $\alpha + \alpha^{-1}$, $\alpha^2 + \alpha^{-2}$, $\alpha^3 + \alpha^{-3}$, etc., de sorte qu'on a toujours

$$E(\alpha) = \alpha^h [c + c_1(\alpha + \alpha^{-1}) + c_2(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + \ldots + c_\mu(\alpha^\mu + \alpha^{-\mu})],$$

où nous avons fait, pour abréger,

$$\frac{\lambda - 1}{2} = \mu.$$

Ainsi, pour le cas de $\lambda = 3$, on a

$$E(\alpha) = \alpha^h [c + c_1(\alpha + \alpha^{-1})]$$

et, en réduisant au moyen de l'équation $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$,

$$E(\alpha) = \alpha^h (c - c_1),$$

d'où

$$c - c_1 = \pm 1;$$

donc, dans ce cas, il n'y a pas d'autres unités que

$$\pm 1, \quad \pm \alpha, \quad \pm \alpha^2.$$

Pour le cas de $\lambda = 5$, on a

$$E(\alpha) = \alpha^h [c + c_1(\alpha + \alpha^{-1}) + c_2(\alpha^2 + \alpha^{-2})],$$

et, en réduisant et mettant pour abréger $c - c_2 = t$, $c_1 - c_2 = u$,

$$E(\alpha) = \alpha^h [t + (\alpha + \alpha^4) u],$$

et de là

$$E(\alpha) E(\alpha^2) = \alpha^{3h} (t^2 - tu - u^2).$$

On en conclut que la forme quadratique $t^2 - tu - u^2$ doit être égale à l'unité, et connaissant la solution générale de l'équation

$$t^2 - tu - u^2 = 1,$$

on en tire toutes les valeurs des unités complexes pour le cas de $\lambda = 5$, lesquelles peuvent être représentées sous la forme simple

$$E(\alpha) = \pm \alpha^h (\alpha + \alpha^4)^m,$$

m étant un entier quelconque positif ou négatif.

L'exemple donné pour $\lambda = 5$ suffit pour faire voir ce qu'il faut chercher pour une valeur quelconque du nombre premier λ. Mais, en allant plus loin, on est bientôt arrêté par de grandes difficultés qu'on ne pourra guère surmonter qu'à l'aide de principes nouveaux. Ces principes, dont nous ferons usage dans la théorie des unités complexes, sont dus à M. Lejeune-Dirichlet qui les a signalés dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* du 30 mars de l'année 1846. Nous reproduirons aussi plusieurs des beaux résultats trouvés par M. Kronecker, et publiés en 1845 dans un Mémoire sur les unités complexes.

Prenons un système de $\frac{\lambda - 3}{2}$ unités complexes

$$c_1(\alpha), \quad c_2(\alpha), \quad c_3(\alpha), \ldots, \quad c_{\mu-1}(\alpha),$$

où

$$\mu = \frac{\lambda - 1}{2},$$

qui soient toutes dégagées du facteur $\pm \alpha^h$, en sorte qu'elles ne contiennent que les périodes à deux termes $\alpha + \alpha^{-1}$, $\alpha^2 + \alpha^{-2}$, etc. Ces unités seront évidemment des quantités réelles que nous prendrons toujours comme positives. Cela posé, nous en composons la forme

$$c_1(\alpha)^{m_1} . c_2(\alpha)^{m_2} . c_3(\alpha)^{m_3} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}},$$

où les exposants m_1, m_2, m_3, etc., sont entiers.

Si cette forme a la propriété que, pour des valeurs différentes des exposants entiers m_1, m_2, m_3, etc., elle ne donne que des unités réellement différentes, ou, ce qui est au fond la même chose, qu'elle ne donne jamais l'unité ordinaire 1 tant que ces exposants ne sont pas tous égaux à zéro, le système des unités

$$c_1(\alpha), \quad c_2(\alpha), \quad c_3(\alpha), \ldots, \quad c_{\mu-1}(\alpha),$$

selon M. Dirichlet, est appelé *un système indépendant*.

La condition du système indépendant que nous venons d'énoncer revient à ce que le déterminant D des quantités logarithmiques

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{l}\, c_1(\alpha), & \mathrm{l}\, c_2(\alpha), & \mathrm{l}\, c_3(\alpha), \ldots, & \mathrm{l}\, c_{\mu-1}(\alpha), \\
\mathrm{l}\, c_1(\alpha^\gamma), & \mathrm{l}\, c_2(\alpha^\gamma), & \mathrm{l}\, c_3(\alpha^\gamma), \ldots, & \mathrm{l}\, c_{\mu-1}(\alpha^\gamma), \\
\mathrm{l}\, c_1(\alpha^{\gamma^2}), & \mathrm{l}\, c_2(\alpha^{\gamma^2}), & \mathrm{l}\, c_3(\alpha^{\gamma^2}), \ldots, & \mathrm{l}\, c_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^2}), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathrm{l}\, c_1\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right), & \mathrm{l}\, c_2\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right), & \mathrm{l}\, c_3\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right), \ldots, & \mathrm{l}\, c_{\mu-1}\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right),
\end{array}$$

ne soit pas égal à zéro. $\Big($La lettre γ désigne ici, comme dans les formules suivantes, une racine primitive de la congruence $\gamma^{\lambda-1} \equiv 1 \pmod{\lambda}$, et l'on fait toujours $\mu = \frac{\lambda-1}{2}\Big)$.

Pour le prouver, posons

$$c_1(\alpha)^{m_1} c_2(\alpha)^{m_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} = c_1(\alpha)^{n_1} c_2(\alpha)^{n_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{n_{\mu-1}};$$

en divisant par le second membre de cette équation, et faisant

$$m_1 - n_1 = x_1, \quad m_2 - n_2 = x_2, \ldots$$

on aurait

$$c_1(\alpha)^{x_1} c_2(\alpha)^{x_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{x_{\mu-1}} = 1,$$

et, en changeant la racine α en $\alpha^\gamma, \alpha^{\gamma^2}, \ldots, \alpha^{\gamma^{\mu-1}}$, on aurait de même

$$c_1(\alpha^\gamma)^{x_1} . c_2(\alpha^\gamma)^{x_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha^\gamma)^{x_{\mu-1}} = 1,$$

$$c_1(\alpha^{\gamma^2})^{x_1} . c_2(\alpha^{\gamma^2})^{x_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^2})^{x_{\mu-1}} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right)^{x_1} . c_2\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right)^{x_2} \ldots c_{\mu-1}\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right)^{x_{\mu-1}} = 1.$$

et, en prenant les logarithmes,

$$x_1 \mathrm{l}\, c_1(\alpha) + x_2 \mathrm{l}\, c_2(\alpha) + \ldots + x_{\mu-1} \mathrm{l}\, c_{\mu-1}(\alpha) = 0.$$

$$x_1 \mathrm{l}\, c_1(\alpha^\gamma) + x_2 \mathrm{l}\, c_2(\alpha^\gamma) + \ldots + x_{\mu-1} \mathrm{l}\, c_{\mu-1}(\alpha^\gamma) = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 \mathrm{l}\, c_1\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right) + x_2 \mathrm{l}\, c_2\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right) + \ldots + x_{\mu-1} \mathrm{l}\, c_{\mu-1}\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right) = 0.$$

En ajoutant ces équations et observant qu'on a

$$c_k(\alpha) . c_k(\alpha^\gamma) . c_k(\alpha^{\gamma^2}) \ldots c_k\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right) = 1,$$

et de là

$$\mathrm{l}\, c_k(\alpha) + \mathrm{l}\, c_k(\alpha^\gamma) + \mathrm{l}\, c_k(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots + \mathrm{l}\, c_k\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right) = 0.$$

on obtient le résultat identique

$$0 = 0.$$

On voit par là qu'une de ces μ équations, par exemple la dernière, peut être rejetée comme déjà contenue dans les autres; on n'aura donc que $\mu - 1$ équations différentes à un même nombre d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$. On sait que, si le déterminant de ce système n'est pas égal à zéro, on n'a que la seule solution

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, \quad x_{\mu-1} = 0,$$

ce qui donne

$$m_1 = n_1, \quad m_2 = n_2, \ldots, \quad m_{\mu-1} = n_{\mu-1};$$

mais on sait aussi que le système a une infinité de solutions différentes si le déterminant est égal à zéro. Donc le système des unités

$$c_1(\alpha), \quad c_2(\alpha), \ldots, \quad c_{\mu-1}(\alpha)$$

sera un système indépendant si le déterminant D n'est pas égal à zéro, et il ne sera jamais un système indépendant si $D = 0$.

C'est un point principal de la théorie générale des unités complexes de prouver qu'il est effectivement des systèmes indépendants de $\mu - 1$ unités. Pour ce but, nous proposons le système de $\mu - 1$ unités conjuguées

$$c(\alpha), \quad c(\alpha^{\gamma}), \quad c(\alpha^{\gamma^2}), \ldots, \quad c(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}),$$

dans lequel $c(\alpha)$ signifie l'unité spéciale

$$c(\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\alpha^{\gamma})(1-\alpha^{-\gamma})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}} = \pm \alpha^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-1)}{2}} \frac{(1-\alpha^{\gamma})}{1-\alpha}.$$

D'après le système exposé ci-dessus, ce système sera indépendant si le déterminant D des quantités

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{l}\,c(\alpha), & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma}), & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^2}), \ldots, & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}), \\
\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma}), & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^2}), & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^3}), \ldots, & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}), & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}), & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu}}), \ldots, & \mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-4}}).
\end{array}$$

n'est pas égal à zéro. Nous tirerons ce déterminant de la résolution effective du système des équations linéaires

$$\begin{array}{l}
x\,\mathrm{l}\,c(\alpha) + x_1\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma}) + \ldots + x_{\mu-2}\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) = \mathrm{A}, \\
x\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma}) + x_1\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots + x_{\mu-2}\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) = \mathrm{A}_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + x_1\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) + \ldots + x_{\mu-2}\,\mathrm{l}\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-4}}) = \mathrm{A}_{\mu-2}.
\end{array}$$

En les ajoutant et faisant

$$A + A_1 + \ldots + A_{\mu-2} = -A_{\mu-1},$$

au moyen de l'équation

$$lc(\alpha) + lc(\alpha^{\gamma}) + lc(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots + lc(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) = 0,$$

on en déduit encore l'équation suivante qu'on peut regarder comme complémentaire,

$$x\, lc(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) + x_1\, lc(\alpha) + \ldots + x_{\mu-2}\, lc(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) = A_{\mu-1}.$$

En multipliant ces équations par $1, \beta^{2k}, \beta^{4k}, \ldots, \beta^{2(\mu-1)k}$ respectivement, β étant une racine primitive de l'équation

$$\beta^{\mu-1} = 1,$$

et ajoutant, on reconnaît facilement que le premier membre de cette somme se décompose en deux facteurs, et il en résulte

$$\begin{aligned}
&(x + \beta^{-2k}x_1 + \beta^{-4k}x_2 + \ldots + \beta^{-2(\mu-2)k}x_{\mu-2}) \\
&\times \left[lc(\alpha) + \beta^{2k}lc(\alpha^{\gamma}) + \beta^{4k}lc(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots + \beta^{2(\mu-1)k}lc(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})\right] \\
&= A + \beta^{2k}A_1 + \beta^{4k}A_2 + \ldots + \beta^{2(\mu-1)k}A_{\mu-1};
\end{aligned}$$

de là, en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
&lc(\alpha) + \beta^{2k}lc(\alpha^{\gamma}) + \beta^{4k}lc(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots \\
&\quad + \beta^{2(\mu-1)k}lc(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) = L(\beta^{2k})
\end{aligned}$$

et

$$A + \beta^{2k}A_1 + \beta^{4k}A_2 + \ldots + \beta^{2(\mu-1)k}A_{\mu-1} = \psi(\beta^{2k}),$$

on a

$$x + \beta^{-2k}x_1 + \beta^{-4k}x_2 + \ldots + \beta^{-2(\mu-2)k}x_{\mu-2} = \frac{\psi(\beta^{2k})}{L(\beta^{2k})},$$

et de là, en multipliant par $\beta^{2kh} - \beta^{-2k}$, prenant

$$h = 1, 2, 3, \ldots, \mu - 1,$$

et ajoutant, on trouve la solution complète du système proposé des

équations linéaires

$$\mu x_h = \frac{(\beta^{-2h} - \beta^2)\psi(\beta^2)}{L(\beta^2)} + \frac{(\beta^{-3h} - \beta^{-1})\psi(\beta^3)}{L(\beta^3)} + \ldots$$
$$+ \frac{[\beta^{(\mu-1)h} - \beta^{-(\mu-1)}]\psi[\beta^{\mu-1}]}{L[\beta^{\mu-1}]}.$$

On en conclut que le dénominateur commun de toutes les inconnues x, $x_1, \ldots, x_{\mu-2}$ est donné par le produit

$$L(\beta^2) . L(\beta^3) \ldots L(\beta^{2\mu-2}),$$

lequel, dégagé du facteur étranger μ, donne le déterminant cherché

$$D = \frac{L(\beta^2) . L(\beta^3) . L(\beta^5) \ldots L(\beta^{2\mu-2})}{\mu}.$$

Ainsi la démonstration de l'indépendance du système proposé des unités conjuguées

$$c(\alpha), \quad c(\alpha^\gamma), \ldots, \quad c(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})$$

est réduite à prouver que l'expression

$$L(\beta^{2h}) = l\,c(\alpha) + \beta^{2h}\,l\,c(\alpha^\gamma) + \beta^{4h}\,l\,c(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots + \beta^{2(\mu-1)h}\,l\,c(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})$$

n'est égale à zéro pour aucune des valeurs

$$h = 1, \; 2, \; 3, \ldots, \; \mu - 1.$$

Pour cela, nous renvoyons le lecteur au célèbre Mémoire de M. Lejeune-Dirichlet, inséré dans les *Actes de l'Académie de Berlin* de l'année 1837, dans lequel il a démontré le premier que toute série arithmétique dont le premier membre et la différence sont sans facteur commun, contient une infinité de nombres premiers [*]. La méthode ingénieuse de ce grand géomètre repose de même sur cette proposition dont il a donné une démonstration rigoureuse à l'endroit cité. Il est donc prouvé que le système des $\mu - 1$ unités conjuguées

$$c(\alpha), \quad c(\alpha^\gamma), \quad c(\alpha^{\gamma^2}), \ldots, \quad c(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})$$

[*] Une traduction française de ce Mémoire, par M. Terquem, a paru au tome IV du présent Journal. (J. Liouville.)

est un système indépendant, et, par conséquent, toutes les propriétés générales des systèmes indépendants que nous allons expliquer, conviendront toujours à ce système remarquable.

Revenons au système général des $\mu - 1$ unités

$$c_1(\alpha),\quad c_2(\alpha),\quad c_3(\alpha),\ldots,\quad c_{\mu-1}(\alpha),$$

et supposons toujours qu'il soit indépendant, c'est-à-dire que le déterminant D des logarithmes de ces unités et de leurs conjuguées ne soit pas égal à zéro. Alors nous savons que toutes les unités contenues dans la forme

$$c_1(\alpha)^{m_1} \cdot c_2(\alpha)^{m_2} \cdot c_3(\alpha)^{m_3} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}}$$

sont différentes entre elles; mais, en général, pour toutes les valeurs entières positives et négatives des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu-1}$, cette forme, multipliée par l'unité simple $\pm \alpha^k$, ne contient pas toutes les unités possibles. Pour remédier à ce défaut, nous ferons abstraction de la restriction que les exposants doivent être des nombres entiers, et nous essayerons d'exprimer toutes les unités, dégagées des unités simples $\pm \alpha^k$, par la forme

$$E(\alpha) = c_1(\alpha)^{x_1} \cdot c_2(\alpha)^{x_2} \cdot c_3(\alpha)^{x_3} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{x_{\mu-1}},$$

dans laquelle $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\mu-1}$ désignent des quantités numériques quelconques. En prenant les logarithmes des deux membres de l'équation proposée et changeant α en $\alpha^\gamma, \alpha^{\gamma^2}, \ldots, \alpha^{\gamma^{\mu-1}}$, on obtient ce système d'équations linéaires

$$x_1 l c_1(\alpha) + x_2 l c_2(\alpha) + \ldots + x_{\mu-1} l c_{\mu-1}(\alpha) = l E(\alpha),$$

$$x_1 l c_1(\alpha^\gamma) + x_2 l c_2(\alpha^\gamma) + \ldots + x_{\mu-1} l c_{\mu-1}(\alpha^\gamma) = l E(\alpha^\gamma),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 l c_1(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) + x_2 l c_2(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) + \ldots + x_{\mu-1} l c_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) = l E(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}),$$

dont l'une, par exemple la dernière, peut être rejetée parce qu'elle est déjà contenue dans les autres. La résolution de ces équations linéaires, dont le déterminant par l'hypothèse n'est pas égal à zéro,

donne toujours des valeurs finies et déterminées des inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ qui sont indépendantes de la racine α, parce que ce système reste le même quand on y change α en α^γ, α^{γ^2}, etc. Donc :

Toutes les unités complexes sans exception peuvent être représentées comme produits des puissances de $\mu - 1$ unités indépendantes, jointes aux unités simples $= \alpha^h$, en admettant des exposants numériques quelconques de ces puissances.

Si, dans l'expression

$$E(\alpha) = c_1(\alpha)^{x_1} \cdot c_2(\alpha)^{x_2} \cdot c_3(\alpha)^{x_3} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{x_{\mu-1}},$$

on sépare les plus grands entiers contenus dans les exposants, et qu'on pose

$$x_1 = m_1 + \delta_1, \quad x_2 = m_2 + \delta_2, \ldots, \quad x_{\mu-1} = m_{\mu-1} + \delta_{\mu-1},$$

où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mu-1}$ sont renfermés entre les limites 0 et 1, on a

$$E(\alpha) = c_1(\alpha)^{m_1} \cdot c_2(\alpha)^{m_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} \cdot c_1(\alpha)^{\delta_1} \cdot c_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}}.$$

Le second facteur $c_1(\alpha)^{\delta_1} \cdot c_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}}$, que nous désignons, pour abréger, par $F(\alpha)$, doit être une unité entière complexe aussi bien que $E(\alpha)$. Soit donc

$$F(\alpha) = a(\alpha + \alpha^{-1}) + a_1(\alpha^\gamma + \alpha^{-\gamma}) + \ldots + a_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-1}} + \alpha^{-\gamma^{\mu-1}}),$$

et de là

$$F(\alpha^\gamma) = a(\alpha^\gamma + \alpha^{-\gamma}) + a_1(\alpha^{\gamma^2} + \alpha^{-\gamma^2}) + \ldots + a_{\mu-1}(\alpha + \alpha^{-1}),$$

$$F(\alpha^{\gamma^2}) = a(\alpha^{\gamma^2} + \alpha^{-\gamma^2}) + a_1(\alpha^{\gamma^3} + \alpha^{-\gamma^3}) + \ldots + a_{\mu-1}(\alpha^\gamma + \alpha^{-\gamma}),$$

. . . . . .

$$F(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) = a(\alpha^{\gamma^{\mu-1}} + \alpha^{-\gamma^{\mu-1}}) + a_1(\alpha + \alpha^{-1}) + \ldots + a_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-2}} + \alpha^{-\gamma^{\mu-2}}).$$

En résolvant ce système d'équations par rapport aux coefficients a,

$a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1}$, on trouve facilement

$$-\lambda a = (2 - \alpha - \alpha^{-1}) F(\alpha) + \left(2 - \alpha^{\gamma} - \alpha^{-\gamma}\right) F\left(\alpha^{\gamma}\right) + \ldots$$
$$+ \left(2 - \alpha^{\gamma^{\mu-1}} - \alpha^{-\gamma^{\mu-1}}\right) F\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right),$$

$$-\lambda a_1 = \left(2 - \alpha^{\gamma} - \alpha^{-\gamma}\right) F(\alpha) + \left(2 - \alpha^{\gamma^2} - \alpha^{-\gamma^2}\right) F\left(\alpha^{\gamma}\right) + \ldots$$
$$+ (2 - \alpha - \alpha^{-1}) F\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right),$$

. . . . . .

$$-\lambda a_{\mu-1} = \left(2 - \alpha^{\gamma^{\mu-1}} - \alpha^{-\gamma^{\mu-1}}\right) F(\alpha) + (2 - \alpha - \alpha^{-1}) F\left(\alpha^{\gamma}\right) + \ldots$$
$$+ \left(2 - \alpha^{\gamma^{\mu-2}} - \alpha^{-\gamma^{\mu-2}}\right) F\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right).$$

Les quantités $2 - \alpha - \alpha^{-1}$, $2 - \alpha^{\gamma} - \alpha^{-\gamma}$, etc., sont toutes positives et contenues entre les limites 0 et 4, car on a

$$\alpha + \alpha^{-1} = 2 \cos \frac{2k\pi}{\lambda}$$

et

$$2 - \alpha - \alpha^{-1} = \left(2 \sin \frac{k\pi}{\lambda}\right)^2.$$

En considérant que les exposants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mu-1}$ sont renfermés entre les limites 0 et 1, on voit aussi que, pour chaque système donné d'unités indépendantes, les quantités $F(\alpha)$, $F\left(\alpha^{\gamma}\right)$, etc., ne peuvent surpasser certaines limites qu'on peut fixer en chaque cas particulier. Il suit de là que les coefficients $a, a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1}$ sont tous négatifs et qu'ils sont contenus entre des limites fixes; et, en considérant encore que ces coefficients sont des nombres entiers, on conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini et limité de valeurs convenables de ces coefficients, et, par conséquent, qu'il n'y a qu'un nombre fini d'unités, telles que $F(\alpha)$.

Le résultat trouvé peut être énoncé comme il suit :

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{\mu-1}$ étant $\mu - 1$ unités indépendantes et $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{\mu-1}$ tous les nombres entiers positifs et négatifs, il y a tou

jours un nombre fini d'unités qui, multipliées par les unités contenues dans la forme

$$\pm \alpha^h c_1(\alpha)^{m_1} . c_2(\alpha)^{m_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} .$$

produisent toutes les unités possibles.

Revenons à présent à la forme

$$E(\alpha) = c_1(\alpha)^{x_1} . c_2(\alpha)^{x_2} . c_3(\alpha)^{x_3} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{x_{\mu-1}},$$

et supposons que les exposants $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ soient déterminés de manière à rendre $E(\alpha)$ une unité entière complexe. Élevons à une puissance entière indéterminée n, et séparons les plus grands entiers de

$$nx_1 = m_1 + \delta_1, \quad nx_2 = m_2 + \delta_2, \ldots, \quad nx_{\mu-1} = m_{\mu-1} + \delta_{\mu-1},$$

de manière que $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mu-1}$ soient tous entre les limites 0 et 1; nous aurons ainsi

$$E(\alpha)^n = c_1(\alpha)^{m_1} . c_2(\alpha)^{m_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} . c_1(\alpha)^{\delta_1} . c_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}}.$$

Maintenant, en donnant à l'exposant n les valeurs 1, 2, 3, 4,..., et ainsi de suite, les nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu-1}$ et les fractions $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mu-1}$ changeront de valeur. Mais, parce qu'il est démontré que la forme

$$c_1(\alpha)^{\delta_1} . c_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}},$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{\mu-1}$ étant toujours entre 0 et 1, ne peut contenir qu'un nombre fini d'unités différentes, il s'ensuit que ce second facteur se reproduira nécessairement et qu'il restera le même pour une certaine suite de valeurs de l'exposant n. Soient n et n' deux exposants auxquels appartient le même second facteur, et soient $m'_1, m'_2, \ldots, m'_{\mu-1}$ des exposants entiers dans l'expression de $E(\alpha)^{n'}$, on aura

$$E(\alpha)^n = c_1(\alpha)^{m_1} . c_2(\alpha)^{m_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} . c_1(\alpha)^{\delta_1} . c_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}}.$$

$$E(\alpha)^{n'} = c_1(\alpha)^{m'_1} . c_2(\alpha)^{m'_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m'_{\mu-1}} . c_1(\alpha)^{\delta_1} . c_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}}.$$

et, en divisant,

$$E(\alpha)^{n-n'} = c_1(\alpha)^{m_1-m'_1} \cdot c_2(\alpha)^{m_2-m'_2} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}-m'_{\mu-1}}.$$

Nous en concluons le théorème suivant :

Il y a toujours une certaine puissance entière de toute unité complexe telle, que cette puissance de l'unité complexe puisse être exprimée par le produit de puissances entières d'un système donné de $\mu-1$ unités indépendantes.

Le même résultat peut aussi s'énoncer comme il suit :

La forme

$$\pm \alpha^h c_1(\alpha)^{x_1} \cdot c_2(\alpha)^{x_2} \cdot c_3(\alpha)^{x_3} \ldots c_{\mu-1}(\alpha)^{x_{\mu-1}}$$

ne contient des unités entières complexes que pour des valeurs rationnelles des exposants $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ dont les dénominateurs ne surpassent pas une certaine limite fixe, mais pour de telles valeurs elle représente toutes les unités possibles.

Ainsi, par exemple, le système des unités

$$c(\alpha), \quad c(\alpha^\gamma), \quad (c^{\gamma^2}), \ldots, \quad c(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}),$$

où

$$c(\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\alpha^\gamma)(1-\alpha^{-\gamma})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}},$$

que nous avons démontré être indépendant, suffit pour représenter toutes les unités complexes. Mais, comme cette représentation a l'inconvénient qu'elle exige, en général, des puissances fractionnaires ou des radicaux, et qu'elle ne donne des unités rationnelles et entières que pour des systèmes de valeurs de ces exposants fractionnaires qu'on ne saurait assigner à priori, nous allons en déduire un autre système d'unités indépendantes tel, que le produit de ses puissances *entières* contienne toutes les unités possibles.

Prenons un système de $\mu-1$ unités indépendantes

$$\varepsilon_1(\alpha), \quad \varepsilon_2(\alpha), \quad \varepsilon_3(\alpha), \ldots, \quad \varepsilon_{\mu-1}(\alpha).$$

D'après le théorème que nous venons de démontrer, certaines puissances entières de ces unités pourront être exprimées comme puissances entières des unités

$$c(\alpha),\quad c\left(\alpha^{\gamma}\right),\quad c\left(\alpha^{\gamma^2}\right),\ldots,\quad c\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right);$$

nous pouvons donc poser

$$\varepsilon_1(\alpha)^{n_1} = c(\alpha)^{r_1^1}.c\left(\alpha^{\gamma}\right)^{r_2^1}\ldots c\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right)^{r_{\mu-1}^1},$$

$$\varepsilon_2(\alpha)^{n_2} = c(\alpha)^{r_1^2}.c\left(\alpha^{\gamma}\right)^{r_2^2}\ldots c\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right)^{r_{\mu-1}^2},$$

. . . . . .

$$\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{n_{\mu-1}} = c(\alpha)^{r_1^{\mu-1}}.c\left(\alpha^{\gamma}\right)^{r_2^{\mu-1}}\ldots c\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right)^{r_{\mu-1}^{\mu-1}},$$

les exposants n_1, n_2,..., $n_{\mu-1}$ étant des nombres entiers qui ne surpassent pas des limites finies et déterminées, et les exposants r_1^1, r_2^1, etc., étant également des nombres entiers. En prenant les logarithmes de ces équations, on a

$$n_1 \,\mathrm{l}\, \varepsilon_1(\alpha) = r_1^1 \,\mathrm{l}\, c(\alpha) + r_2^1 \,\mathrm{l}\, c\left(\alpha^{\gamma}\right) + \ldots + r_{\mu-1}^1 \,\mathrm{l}\, c\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right).$$

$$n_2 \,\mathrm{l}\, \varepsilon_2(\alpha) = r_1^2 \,\mathrm{l}\, c(\alpha) + r_2^2 \,\mathrm{l}\, c\left(\alpha^{\gamma}\right) + \ldots + r_{\mu-1}^2 \,\mathrm{l}\, c\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right).$$

. . . . . .

$$n_{\mu-1} \,\mathrm{l}\, \varepsilon_{\mu-1}(\alpha) = r_1^{\mu-1} \,\mathrm{l}\, c(\alpha) + r_2^{\mu-1} \,\mathrm{l}\, c\left(\alpha^{\gamma}\right) + \ldots + r_{\mu-1}^{\mu-1} \,\mathrm{l}\, c\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right).$$

Désignons par la lettre Δ le déterminant des quantités

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha), & \mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha),\ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha), \\
\mathrm{l}\,\varepsilon_1\left(\alpha^{\gamma}\right), & \mathrm{l}\,\varepsilon_2\left(\alpha^{\gamma}\right),\ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}\left(\alpha^{\gamma}\right), \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\mathrm{l}\,\varepsilon_1\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right), & \mathrm{l}\,\varepsilon_2\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right),\ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right).
\end{array}$$

Soit de même D le déterminant des quantités

$$\begin{array}{llll} \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha), & \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma}), \ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma^{\nu-2}}), \\ \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma}), & \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma^{2}}), \ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma^{\nu-1}}), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma^{\nu-2}}), & \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma^{\nu-1}}), \ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon(\alpha^{\gamma^{\nu-1}}), \end{array}$$

et R le déterminant du système des nombres

$$\begin{array}{lll} r_1^1, & r_2^1, \ldots, & r_{\nu-1}^1, \\ r_1^2, & r_2^2, \ldots, & r_{\nu-1}^2, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{\nu-1}, & r_2^{\nu-1}, \ldots, & r_{\nu-1}^{\nu-1}. \end{array}$$

En examinant les expressions des quantités $\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha)$, $\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha)$, etc., et celles qu'on en tire par le changement de la racine α en α^{γ}, α^{γ^2}, etc., on reconnaît facilement que le déterminant Δ se compose des deux déterminants D et R; en effet, on a

$$\Delta = \frac{\mathrm{R}.\mathrm{D}}{n_1 . n_2 \ldots n_{\nu-1}}.$$

En excluant tous les systèmes de valeurs des entiers r_k^h, qui donneraient

$$\mathrm{R} = 0,$$

et, par conséquent aussi,

$$\Delta = 0,$$

la plus petite valeur de R, qui est un nombre entier, sera

$$\mathrm{R} = 1.$$

De plus, nous savons que le déterminant D a une valeur finie et déterminée différente de zéro, et que les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_{\mu-1}$ ne surpassent pas une limite fixe; nous en concluons qu'il y aura toujours une valeur *minimum* finie et déterminée de Δ, c'est-à-dire

que, parmi les systèmes en nombres infinis de $\mu - 1$ unités indépendantes, il n'y en aura jamais aucun dont le déterminant Δ soit inférieur à une certaine limite finie.

Nous appelons *système fondamental* tout système indépendant de $\mu - 1$ unités pour lequel le déterminant Δ a cette valeur du *minimum* dont nous venons de prouver l'existence. Supposons aussi que les unités

$$\varepsilon_1(\alpha), \quad \varepsilon_2(\alpha), \ldots, \quad \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$$

représentent un tel système fondamental dont le déterminant Δ ait la valeur la moindre possible. Cela posé, nous allons démontrer que la forme

$$\pm \alpha^h \varepsilon_1(\alpha)^{m_1} . \varepsilon_2(\alpha)^{m_2} . \varepsilon_3(\alpha)^{m} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}},$$

pour des valeurs *entières* des exposants m_1, m_2, $m_3, \ldots$, $m_{\mu-1}$, donne toutes les unités sans exception. En effet, imaginons qu'il y ait une unité non comprise dans cette forme, nous savons qu'elle pourrait toujours être représentée par la forme

$$\pm \alpha^h \varepsilon_1(\alpha)^{x_1} . \varepsilon_2(\alpha)^{x_2} . \varepsilon_3(\alpha)^{x} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{x_{\mu-1}},$$

pour des valeurs fractionnaires de x_1, $x_2, \ldots$, $x_{\mu-1}$; séparant donc les plus grands entiers contenus dans ces exposants, et faisant comme ci-dessus,

$$x_1 = m_1 + \delta_1, \quad x_2 = m_2 + \delta_2, \ldots, \quad x_{\mu-1} = m_{\mu-1} + \delta_{\mu-1},$$

où m_1, $m_2, \ldots$, $m_{\mu-1}$ sont entiers et δ_1, $\delta_2, \ldots$, $\delta_{\mu-1}$ contenus entre 0 et 1, cette unité complexe prendrait la forme

$$\pm \alpha^h \varepsilon_1(\alpha)^{m_1} . \varepsilon_2(\alpha)^{m_2} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} . \varepsilon_1(\alpha)^{\delta_1} . \varepsilon_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}},$$

et de là il suivrait que

$$\varepsilon_1(\alpha)^{\delta_1} . \varepsilon_2(\alpha)^{\delta_2} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{\delta_{\mu-1}} = \mathrm{E}(\alpha)$$

serait encore une unité entière complexe. Les quantités δ_1, $\delta_2, \ldots$, $\delta_{\mu-1}$ qui sont moindres que l'unité ne pourraient pas toutes être égales à zéro; supposons donc que δ_1 soit différent de zéro et prenons le

nouveau système de $\mu - 1$ unités

$$E(\alpha), \quad \varepsilon_2(\alpha), \quad \varepsilon_3(\alpha), \ldots, \quad \varepsilon_{\mu-1}(\alpha).$$

Le determinant des logarithmes de ce système, que nous désignerons par Δ',

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{l}\,E(\alpha), & \mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha), & \mathrm{l}\,\varepsilon_3(\alpha), \ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha), \\
\mathrm{l}\,E(\alpha^\gamma), & \mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^\gamma), & \mathrm{l}\,\varepsilon_3(\alpha^\gamma), \ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^\gamma), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathrm{l}\,E(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}), & \mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}), & \mathrm{l}\,\varepsilon_3(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}), \ldots, & \mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}),
\end{array}$$

se réduit immédiatement au déterminant Δ; car, au moyen de l'équation

$$\mathrm{l}\,E(\alpha) = \delta_1 \mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha) + \delta_2 \mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + \delta_{\mu-1} \mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha),$$

et de celles qu'on en déduit en changeant α en $\alpha^\gamma, \alpha^{\gamma^2}, \ldots, \alpha^{\gamma^{\mu-1}}$, on trouve

$$\Delta' = \delta_1 \Delta.$$

Mais, δ_1 étant moindre que 1 et différent de zéro, on en conclut qu'il y aurait un système de $\mu - 1$ unités indépendantes à qui appartiendrait un déterminant Δ' moindre que Δ, c'est-à-dire moindre que le plus petit de tous, ce qui serait absurde. Nous avons donc ce théorème important :

Il existe toujours des systèmes de $\mu - 1$ unités fondamentales telles, qu'en les élevant à des puissances entières, multipliant et joignant le facteur $\pm \alpha^h$, on produit toutes les unités possibles, et qu'en prenant des combinaisons différentes des exposants on ne produira que des unités vraiment différentes.

Le calcul effectif de systèmes d'unités fondamentales étant toujours très-pénible, nous ne nous arrêterons pas à expliquer les méthodes propres à ce but; mais nous terminerons cet abrégé des propriétés principales des unités complexes en démontrant qu'il y a toujours une infinité de systèmes différents d'unités fondamentales, et en faisant voir le rapport qui existe entre eux.

Pour cela, nous prenons les $\mu - 1$ unités

$$E_1(\alpha), \quad E_2(\alpha), \quad E_3(\alpha), \ldots, \quad E_{\mu-1}(\alpha)$$

qui s'expriment par les unités fondamentales

$$\varepsilon_1(\alpha), \quad \varepsilon_2(\alpha), \ldots, \quad \varepsilon_{\mu-1}(\alpha),$$

comme il suit :

$$E_1(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha)^{r_1^1} . \varepsilon_2(\alpha)^{r_2^1} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{r_{\mu-1}^1},$$

$$E_2(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha)^{r_1^2} . \varepsilon_2(\alpha)^{r_2^2} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{r_{\mu-1}^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E_{\mu-1}(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha)^{r_1^{\mu-1}} . \varepsilon_2(\alpha)^{r_2^{\mu-1}} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{r_{\mu-1}^{\mu-1}},$$

où tous les exposants r_k^h sont entiers. En prenant les logarithmes, on a

$$l\,E_1(\alpha) = r_1^1\,l\,\varepsilon_1(\alpha) + r_2^1\,l\,\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + r_{\mu-1}^1\,l\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha),$$

$$l\,E_2(\alpha) = r_1^2\,l\,\varepsilon_1(\alpha) + r_2^2\,l\,\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + r_{\mu-1}^2\,l\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l\,E_{\mu-1}(\alpha) = r_1^{\mu-1}\,l\,\varepsilon_1(\alpha) + r_2^{\mu-1}\,l\,\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + r_{\mu-1}^{\mu-1}\,l\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha).$$

Donc, en désignant, comme ci-dessus, par R le déterminant des entiers r_1^1, r_2^1, etc., par Δ le déterminant du système des unités fondamentales

$$\varepsilon_1(\alpha), \quad \varepsilon_2(\alpha), \ldots, \quad \varepsilon_{\mu-1}(\alpha),$$

et, de plus, par Δ_1 le déterminant analogue des logarithmes du système $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$, etc., on aura, par la même raison que ci-dessus,

$$\Delta_1 = R\,\Delta.$$

Ainsi, toutes les fois que le déterminant R est égal à l'unité, on aura

$$\Delta_1 = \Delta,$$

et, par conséquent, le système des unités

$$E_1(\alpha), \quad E_2(\alpha), \ldots, \quad E_{\mu-1}(\alpha)$$

sera un système fondamental. Ainsi, d'un seul système fondamental on déduira l'infinité de tous les autres sans exception.

En observant que le déterminant R est un nombre entier, on voit aussi que le quotient qu'on obtient en divisant le déterminant d'un système indépendant quelconque par le déterminant du système fondamental est un nombre entier.

§ III.

Des périodes des racines de l'équation $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0$ *et de leur correspondance avec les racines de congruences analogues.*

Après avoir traité le cas où la norme d'un nombre complexe est égale à l'unité, nous passons à la discussion générale des nombres complexes dont les normes sont des entiers quelconques. Mais pour aborder la question dans toute la généralité qu'elle exige, nous ne nous bornerons pas au cas où les nombres complexes sont composés des simples racines de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

mais nous admettrons aussi qu'ils contiennent les périodes de ces racines. Au premier aspect, les nombres complexes composés des périodes paraissent être moins généraux que ceux qui contiennent les simples racines; mais, en considérant que les périodes qui ne consistent qu'en un seul terme sont les simples racines, on voit que la discussion des nombres complexes composés des périodes embrassera tous les nombres complexes, tels que nous les avons proposés au commencement.

Nous commençons par exposer les principes du calcul des périodes dont nous ferons usage dans la suite de ce Mémoire. Soient e et f deux facteurs du nombre $\lambda - 1$, en sorte qu'on ait

$$\lambda - 1 = e.f;$$

soit, comme ci-dessus, γ une racine primitive de la congruence

$$\gamma^{\lambda-1} \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Cela posé, les racines imaginaires de l'équation

$$\alpha^p = 1$$

pourront être rangées en e périodes à f termes, comme il suit :

$$\eta = \alpha + \alpha^{\gamma^e} + \alpha^{\gamma^{2e}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{(f-1)e}},$$

$$\eta_1 = \alpha^{\gamma} + \alpha^{\gamma^{e+1}} + \alpha^{\gamma^{2e+1}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{(f-1)e+1}},$$

$$\eta_2 = \alpha^{\gamma^2} + \alpha^{\gamma^{e+2}} + \alpha^{\gamma^{2e+2}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{(f-1)e+2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_{e-1} = \alpha^{\gamma^e} + \alpha^{\gamma^{2e-1}} + \alpha^{\gamma^{3e-1}} + \ldots + \alpha^{\gamma^{fe-1}}.$$

Ces périodes forment un cycle tel, qu'en continuant la série

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_{e-1},$$

on aura

$$\eta_e = \eta, \quad \eta_{e+1} = \eta_1,$$

et généralement

$$\eta_{ke+h} = \eta_h.$$

Le changement de α en α^{γ^h} ne changera pas l'ordre cyclique des périodes, car au lieu de la suite

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1},$$

on aura respectivement

$$\eta_h, \quad \eta_{h+1}, \quad \eta_{h+2}, \ldots, \quad \eta_{h-1}.$$

La somme de toutes les périodes étant la même que la somme de toutes les racines de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{p-1} = 0$$

est égale à l'unité négative

$$\eta + \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{e-1} = -1.$$

Le produit de deux périodes est toujours une fonction linéaire de toutes les périodes du même rang. En exécutant la multiplication des

deux périodes η et η_k, on trouve

$$\eta\eta_k = n^k f + m^k \eta + m_1^k \eta_1 + m_2^k \eta_2 + \ldots + m_{e-1}^k \eta_{e-1}.$$

En changeant les périodes η en η_r, η_1 en η_{r+1}, η_2 en η_{r+2}, etc., on a aussi

$$\eta_r \eta_{r+k} = n^k f + m^k \eta_r + m_1^k \eta_{r+1} + m_2^k \eta_{r+2} + \ldots + m_{e-1}^k \eta_{r-1},$$

et, en faisant

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ e-1,$$

on a le système d'équations

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} \eta^2 = n f + m\eta + m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 + \ldots + m_{e-1} \eta_{e-1}, \\ \eta\eta_1 = n^1 f + m^1 \eta + m_1^1 \eta_1 + m_2^1 \eta_2 + \ldots + m_{e-1}^1 \eta_{e-1}, \\ \eta\eta_2 = n^2 f + m^2 \eta + m_1^2 \eta_1 + m_2^2 \eta_2 + \ldots + m_{e-1}^2 \eta_{e-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta\eta_{e-1} = n^{e-1} f + m^{e-1} \eta + m_1^{e-1} \eta_1 + m_2^{e-1} \eta_2 + \ldots + m_{e-1}^{e-1} \eta_{e-1}. \end{array}\right.$$

Dans ces équations fondamentales pour le calcul des périodes, les coefficients n^k sont toujours égaux à zéro, excepté : 1° pour f pair et $k = 0$; 2° pour f impair et $k = \frac{1}{2} e$; on a pour ces deux cas $n^k = 1$. Les autres coefficients m_h^k sont des nombres entiers, tels que m_h^k sera égal au nombre des valeurs positives et moindres que f (zéro y compris) de x et y qui satisfont à la conguence

$$\gamma^{h+xe} + 1 \equiv \gamma^{k+ye} \quad (\text{mod. } \lambda).$$

En regardant les simples racines α, α^{γ}, α^{γ^2}, etc., dont chaque période contient un nombre f, on voit que le produit de deux périodes en contiendra f^2, et de là il est aisé de conclure qu'on aura toujours

$$n^k + m^k + m_1^k + m_2^k + \ldots + m_{e-1}^k = f.$$

Si, dans la formule qui donne le produit des deux périodes η_r, η_{r+k}, on fait successivement

$$r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ e-1.$$

et qu'on ajoute, on trouve

$$\eta\eta_k + \eta_1\eta_{k+1} + \eta_2\eta_{k+2} + \ldots + \eta_{e-1}\eta_{k-1}$$
$$= n^k ef - m^k - m_1^k - m_2^k - \ldots - m_{e-1}^k.$$

et de là

$$\eta\eta_k + \eta_1\eta_{k+1} + \eta_2\eta_{k+2} + \ldots + \eta_{e-1}\eta_{k-1} = n^k\lambda - f.$$

Donc, d'après la valeur donnée de n^k, cette somme est égale à $-f$, excepté les cas : 1° f pair et $k = 0$; 2° f impair et $k = \frac{1}{2}e$, où cette somme est égale à $\lambda - f$.

En multipliant l'expression donnée du produit de deux périodes η_r, η_{r+k} par η_{r+h}, prenant ensuite

$$r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ e-1,$$

ajoutant et réduisant à l'aide des formules données ci-dessus, on trouve

$$\eta\eta_k\eta_h + \eta_1\eta_{k+1}\eta_{h+1} + \eta_2\eta_{k+2}\eta_{h+2} + \ldots + \eta_{e-1}\eta_{k-1}\eta_{h-1}$$
$$= -f^2 + \lambda m_h^k.$$

si f est un nombre pair;

$$\eta\eta_k\eta_h + \eta_1\eta_{k+1}\eta_{h+1} + \eta_2\eta_{k+2}\eta_{h+2} + \ldots + \eta_{e-1}\eta_{k-1}\eta_{h-1}$$
$$= -f^2 + \lambda m_{h+\frac{1}{2}e}^k,$$

si f est un nombre impair.

Parce que, dans ces formules, les lettres k et h peuvent être échangées entre elles, on en tire cette propriété remarquable des coefficients du système des équations (A),

$$m_h^k = m_k^h,$$

si f est pair;

$$m_{h+\frac{1}{2}e}^k = m_{k+\frac{1}{2}e}^h,$$

si f est impair.

Une autre relation du même genre provient de l'expression du produit $\eta_r\eta_{r+k}$, en y changeant k en $e-k$ et r en $r+k$, et comparant avec l'expression primitive, on trouve

$$m_h^k = m_{h-k}^{e-k}.$$

Dans le système des équations (A) on peut considérer comme inconnues les e périodes, et ces équations suffiront toujours pour les trouver complétement. En effet, l'élimination des périodes

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \ldots, \quad \eta_{e-1}$$

donnera une équation du degré e à coefficients entiers pour déterminer la première période η, et puisque, évidemment, toute période peut être regardée comme première, cette équation aura nécessairement comme racines toutes les e périodes

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1}.$$

On aura ainsi l'équation

$$\eta^e - A_1 \eta^{e-1} + A_2 \eta^{e-2} - A_3 \eta^{e-3} + \ldots \mp A_e = 0,$$

dont les racines sont toutes les e périodes et dont les coefficients A_1, $A_2, \ldots, A_e$ sont des nombres entiers. De plus, si dans le système (A) on prend la première période η comme connue et les autres comme inconnues, toutes ces équations ne sont que linéaires par rapport aux inconnues $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$; et de là, en résolvant ces équations, après avoir rejeté une quelconque d'entre elles comme superflue, on trouvera les périodes $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$ exprimées rationnellement par la première η. Le résultat de la résolution des équations (A) pourra toujours être réduit à la forme

$$D\eta_1 = B + B_1\eta + B_2\eta^2 + B_3\eta^3 + \ldots + B_{e-1}\eta^{e-1}$$

où $B, B_1, B_2, \ldots, B_{e-1}$ et D sont entiers.

Nous ajoutons encore le théorème important, que toute fonction rationnelle et entière des périodes peut être représentée comme fonction *linéaire* de ces périodes. En effet, au moyen des équations (A) on a le produit de deux périodes quelconques exprimé comme fonction linéaire de toutes les périodes; il suit de là qu'en répétant cette réduction, on parviendra à réduire à la forme linéaire les produits de plusieurs périodes, et, par conséquent aussi, toute fonction entière et rationnelle des périodes. De plus, il est aisé de démontrer qu'une telle fonction ne peut être ramenée à la forme

$$a\eta + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1}$$

que d'une seule manière; car, si l'on avait aussi

$$b\eta + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \ldots + b_{e-1}\eta_{e-1}$$

égal à la même fonction rationnelle, il s'ensuivrait

$$a\eta + a_1\eta_1 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1} = b\eta + b_1\eta_1 + \ldots + b_{e-1}\eta_{e-1}$$

et de là

$$(a-b)\eta + (a_1-b_1)\eta_1 + \ldots + (a_{e-1}-b_{e-1})\eta_{e-1} = 0.$$

en exprimant les périodes par les racines de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0.$$

et divisant par α, on aurait une équation à coefficients entiers du degré $\lambda-2$ dont la racine serait α, ce qu'on sait être impossible.

Une propriété très-importante de toutes les équations rationnelles entre les périodes

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1},$$

c'est de donner toujours des solutions réelles lorsqu'on les envisage comme congruences pour une certaine classe de modules, en sorte qu'à chaque période corresponde un certain nombre entier. Cette correspondance intime entre les périodes comme racines des équations proposées et les racines des congruences analogues nous servira de base pour la recherche des facteurs, et surtout des facteurs premiers des nombres complexes; c'est pour cette raison que nous en donnerons ici les développements nécessaires.

D'abord nous expliquerons une amplification de la définition des congruences dont nous ferons usage dans la suite de ce Mémoire, qui consiste en ce que nous y admettons aussi les périodes

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1}.$$

Le sens de telles congruences est fixé comme il suit :

Deux fonctions rationnelles et entières des périodes à coefficients entiers sont censées congrues par rapport à un module entier donné si, dans leur différence réduite à la forme linéaire

$$a\eta + a_1\eta_1 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1},$$

tous les coefficients $a, a_1, a_2, \ldots, a_{e-1}$ *sont divisibles par ce module*

Une congruence contenant les périodes à f termes équivaut donc toujours à e congruences pour des nombres entiers, qui sont complétement déterminées parce qu'une fonction rationnelle et entière des périodes n'est réductible à cette forme linéaire que d'une seule manière. Selon cette définition, on pourra opérer sur les congruences qui contiennent les périodes de la même manière que sur les congruences ordinaires.

Cela posé, nous partons de la proposition connue que, dans le produit développé de q facteurs,

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-q+1) = z^q - b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} - \ldots + b_{q-1} z,$$

où q est un nombre premier, tous les coefficients $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{q-2}$ sont divisibles par q, excepté le dernier b_{q-1} qui donne le reste -1. En posant donc

$$z = y - \eta_k,$$

où y est un nombre entier, et négligeant les termes divisibles par le module q, on aura la congruence

$$\begin{aligned}(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k)\\ \equiv (y-\eta_k)^q - (y-\eta_k) \pmod{q}.\end{aligned}$$

Observons aussi que, dans le développement de la puissance du binôme $(y-\eta_k)^q$, q étant un nombre premier, tous les termes sont divisibles par q, excepté le premier et le dernier, d'où

$$(y-\eta_k)^q \equiv y^q - \eta_k^q \pmod{q}.$$

De même, en élevant le polynôme

$$\eta_k = \alpha^{i^k} + \alpha^{i^{k+1}} + \alpha^{i^{k+2}} + \ldots + \alpha^{i^{k+f-1}}$$

à la puissance q, et rejetant tous les termes divisibles par q, on aura

$$\eta_k^q \equiv \alpha^{i^{kq}} + \alpha^{i^{kq+1}} + \alpha^{i^{kq+2}} + \ldots + \alpha^{i^{kq+f-1}} \pmod{q};$$

et de là, en posant $q \equiv \gamma^r \pmod{\lambda}$,

$$\eta_k^q \equiv \eta_{k+r} \pmod{q}.$$

Enfin on a, en vertu du théorème de Fermat,

$$y^q \equiv y \pmod{q},$$

d'où

$$(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k)$$
$$\equiv \eta_k - \eta_{k+r} \pmod{q}.$$

Supposons maintenant que r soit un multiple de e, en sorte qu'on ait

$$q \equiv \gamma^{re} \pmod{\lambda},$$

ou, ce qui revient au même,

$$q^f \equiv 1 \pmod{\lambda};$$

alors, le second membre de la congruence se réduisant à zéro, on a

$$(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k) \equiv 0 \pmod{q}.$$

En multipliant les e congruences contenues dans celle-ci pour les valeurs de

$$k = 0, 1, 2, \ldots, e-1,$$

et en désignant, pour abréger, par $\varphi(y)$ le produit

$$(y-\eta_0)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\ldots(y-\eta_{e-1}),$$

on aura cette congruence pour le module q^e,

$$\varphi(y)\varphi(y-1)\varphi(y-2)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv 0 \pmod{q^e}.$$

On en conclut aisément que la congruence

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q}$$

aura toujours e racines réelles; en observant encore que le produit désigné par $\varphi(y)$ est exactement le premier membre de l'équation

$$y^e - A_1 y^{e-1} + A_2 y^{e-2} - \ldots \pm A_e = 0,$$

dont les racines sont les e périodes, on aura ce résultat :

L'équation du degré e, dont les racines sont les périodes à f termes, prise pour congruence par rapport à un module q, nombre premier, qui

satisfait à la condition

$$q^f \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

a toujours e racines réelles.

Cela étant, nous établissons ce système de congruences parfaitement analogues au système des équations (A) :

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{l} uu \equiv nf + mu + m_1 u_1 + \ldots + m_{e-1} u_{e-1} \\ uu_1 \equiv n^1 f + m^1 u + m_1^1 u_1 + \ldots + m_{e-1}^1 u_{e-1} \\ uu_2 \equiv n^2 f + m^2 u + m_1^2 u_1 + \ldots + m_{e-1}^2 u_{e-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ uu_{e-1} \equiv n^{e-1} f + m^{e-1} u + m_1^{e-1} u + \ldots + m_{e-1}^{e-1} u_{e-1} \end{array}\right\} \pmod{q},$$

où le module q soit un nombre premier, tel qu'on ait

$$q^f \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

L'élimination des $e - 1$ des inconnus

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{e-1}$$

donne nécessairement une congruence du degré e qui sera parfaitement conforme à l'équation dont les e racines sont les périodes, savoir,

$$y^e - A_1 y^{e-1} + A_2 y^{e-2} - \ldots \pm A_e \equiv 0 \pmod{q},$$

et, puisque cette congruence a toutes ses racines réelles, on en tirera les valeurs réelles des inconnus

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{e-1}.$$

Ainsi, le système des congruences (B) est toujours résoluble par des nombres entiers réels. Observons aussi que, pour le premier des inconnus u, on peut choisir une quelconque des racines de cette congruence; mais celle-ci une fois déterminée, on ne pourra plus choisir arbitrairement la seconde, la troisième et les autres, puisque l'ordre de ces racines dépend des congruences (B).

La conformité des équations (A) avec les congruences (B) nous conduit à la conclusion, que toutes les réductions et transformations

des fonctions entières des périodes qu'on peut effectuer au moyen des équations (A), seront absolument les mêmes pour les nombres entiers qu'on obtient en remplaçant les périodes

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1}$$

par les nombres

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{e-1},$$

et, puisque toutes les équations rationnelles et entières entre les périodes se réduisent à des identités simples, il en sera toujours de même des congruences analogues. Nous avons donc le théorème suivant :

Toute équation qui ne contient que des fonctions rationnelles et entières des périodes donne immédiatement une congruence quand on y remplace les périodes par les nombres entiers correspondants qui satisfont aux congruences (B).

Par exemple, des équations données ci-dessus on tire les congruences

$$u + u_1 + u_2 + \ldots + u_{e-1} \equiv -1 \pmod{q},$$

et

$$uu_k + u_1 u_{k+1} + u_2 u_{k+2} + \ldots + u_{e-1} u_{k-1} \equiv -f, \pmod{q},$$

excepté les cas où f est pair et $k = 0$, ou bien pour f impair et $k = \frac{1}{2}e$, où cette somme est congrue à $\lambda - f$.

§ IV.

Des facteurs premiers de la norme d'un nombre complexe quelconque.

Une fonction rationnelle et entière des périodes à coefficients entiers, c'est-à-dire un nombre complexe contenant les périodes, peut être considéré comme fonction d'une seule période, par exemple de la première η, et, pour cette raison, nous la désignerons simplement par $F(\eta)$. De même, le nombre entier qui en résulte si l'on remplace les périodes

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1}$$

par les racines de congruences analogues

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{e-1},$$

sera désigné par $F(u)$, ou, si l'on prend les périodes

$$\eta, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1}$$

respectivement correspondantes aux racines des congruences

$$u_r, \quad u_{r+1}, \quad u_{r+2}, \ldots, \quad u_{r-1},$$

le nombre entier correspondant à $F(\eta)$ sera désigné par $F(u_r)$.

Pour qu'un nombre complexe $F(\eta)$, contenant les périodes seules, soit divisible par un entier non complexe q, il est nécessaire et il suffit que, dans la forme linéaire de ce nombre

$$F(\eta) = a\eta + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1},$$

tous les coefficients $a, a_1, a_2, \ldots, a_{e-1}$ aient le facteur commun q. Mais cette méthode de trouver les facteurs entiers non complexes des nombres complexes n'est pas bien applicable au cas d'un nombre complexe donné comme produit de plusieurs facteurs dont la multiplication effective serait très-pénible. Pour ce but, nous ferons usage de ce théorème :

Si une fonction entière rationnelle des périodes à coefficients entiers est divisible par le facteur premier non complexe q, qui satisfait à la congruence

$$q^f \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

tous les nombres entiers qu'on déduit de ce nombre complexe en remplaçant les périodes par des racines de congruences analogues, seront divisibles par q. Réciproquement, si tous ces e nombres entiers sont divisibles par q, la fonction des périodes dont ils dérivent le sera aussi.

Au moyen des signes adoptés, ce théorème s'exprime de la manière suivante :

Si l'on a

$$F(\eta) \equiv 0 \pmod{q},$$

où q satisfait à la congruence

$$q^f \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

il s'ensuit

$$F(u) \equiv 0, \quad F(u_1) \equiv 0, \quad F(u_2) \equiv 0, \ldots, \quad F(u_{e-1}) \equiv 0 \pmod{q};$$

et, réciproquement, si

$$F(u) \equiv 0, \quad F(u_1) \equiv 0, \ldots, \quad F(u_{e-1}) \equiv 0 \pmod{q},$$

il s'ensuit

$$F(\eta) \equiv 0 \pmod{q}.$$

En effet, supposons $F(\eta)$ réduit à la forme linéaire

$$F(\eta) = a\eta + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1}$$

en changeant le terme initial des périodes, nous aurons en même temps

$$F(\eta_1) = a\eta_1 + a_1\eta_2 + a_2\eta_3 + \ldots + a_{e-1}\eta,$$

$$F(\eta_2) = a\eta_2 + a_1\eta_3 + a_2\eta_4 + \ldots + a_{e-1}\eta_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(\eta_{e-1}) = a\eta_{e-1} + a_1\eta + a_2\eta_1 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-2}$$

La résolution de ces e équations, linéaires par rapport aux coefficients, donne sans difficulté

$$\lambda a_k = (\eta_k - f)F(\eta) + (\eta_{k+1} - f)F(\eta_1) + \ldots + (\eta_{k-1} - f)F(\eta_{e-1}),$$

si f est pair, et

$$\lambda a_{k+\frac{e}{2}} = (\eta_k - f)F(\eta) + (\eta_{k+1} - f)F(\eta_1) + \ldots + (\eta_{k-1} - f)F(\eta_{e-1}),$$

si f est impair.

Maintenant, si l'on remplace les périodes par les racines des congruences, on a

$$F(u_r) \equiv au_r + a_1u_{r+1} + a_2u_{r+2} + \ldots + a_{e-1}u_{r-1} \pmod{q},$$

et puisque, $F(\eta)$ étant divisible par q, il en sera de même des coefficients $a, a_1, a_2, \ldots, a_{e-1}$, on en conclut que le nombre $F(u_r)$ sera divisible par q pour toutes les valeurs

$$r = 0, 1, 2, \ldots, e-1.$$

De même, on a

$$\lambda a_k \equiv (u_k - f)F(u) + (u_{k+1} - f)F(u_1) + \ldots$$
$$+ (u_{k-1} - f)F(u_{e-1}) \pmod{\lambda},$$

si f est pair, et la même expression est congrue à $\lambda a_{k+\frac{e}{2}}$ si f est impair; donc, si l'on a

$$F(u) \equiv 0, \quad F(u_1) \equiv 0, \ldots, \quad F(u_{e-1}) \equiv 0 \pmod{q},$$

on aura aussi

$$a_k \equiv 0 \pmod{q},$$

pour toutes les valeurs de

$$k = 0, 1, 2, \ldots, e-1,$$

et, par conséquent,

$$F(\eta) \equiv 0 \pmod{q},$$

ce qu'il fallait démontrer.

La norme d'un nombre complexe $F(\eta)$ qui ne contient pas les simples racines α, α^γ, α^{γ^2}, etc., mais seulement les périodes à f termes de ces racines, prise par rapport aux périodes, sera le produit des e facteurs

$$F(\eta), \quad F(\eta_1), \quad F(\eta_2), \ldots, \quad F(\eta_{e-1}),$$

qui est toujours un nombre entier. La norme du même nombre $F(\eta)$, prise par rapport aux diverses valeurs de la racine α, contenue dans les périodes, sera composée de $\lambda - 1 = e \cdot f$ facteurs, dont f à f seront égaux; elle sera donc la $f^{\text{ième}}$ puissance de la norme, prise par rapport aux périodes. Nous ne craignons point d'embarras en désignant la norme, prise par rapport aux périodes, par la lettre N, de même que la norme, prise par rapport aux racines de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0.$$

Donc, en mettant

$$NF(\eta) = F(\eta) \cdot F(\eta_1) \cdot F(\eta_2) \ldots F(\eta_{e-1}),$$

et en substituant aux périodes les racines des congruences, nous avons

$$NF(\eta) \equiv F(u) \cdot F(u_1) \cdot F(u_2) \ldots F(u_{e-1}) \pmod{q}.$$

Cette congruence donne immédiatement le théorème suivant :

Si la norme d'un nombre complexe $F(\eta)$, composé des périodes

seules, est divisible par q, un des nombres

$$F(u),\quad F(u_1),\quad F(u_2),\ldots,\quad F(u_{e-1})$$

sera de même divisible par q; et réciproquement, si l'un de ces nombres est divisible par q, q sera nécessairement facteur de la norme.

Nous allons maintenant discuter les conditions nécessaires pour que la norme d'un nombre complexe quelconque, composé des racines de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

ait un facteur premier donné. Quant au nombre λ, nous avons trouvé cette condition dans le § Ier de ce Mémoire, savoir, que la somme des coefficients d'un nombre complexe doit être divisible par λ pour que la norme ait le facteur λ, et réciproquement. Tous les autres nombres premiers peuvent être rangés selon les exposants auxquels ils appartiennent pour le module λ (*voyez* M. Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ*, § LII), et cette classification convient parfaitement aux divers diviseurs de la norme dont les caractères sont intimement liés aux plus petits exposants de ses puissances qui sont congrues à l'unité pour le module λ. Nous supposons donc, comme ci-dessus, que q soit un nombre premier tel que

$$q^f \equiv 1 \pmod{\lambda};$$

mais, désormais, nous ajoutons la condition que q appartienne à l'exposant f, en sorte qu'aucune puissance de q inférieure à la $f^{ième}$ ne soit congrue à l'unité. La puissance d'une racine primitive γ, congrue à un nombre q qui appartient à l'exposant f, sera

$$q \equiv \gamma^{re} \pmod{\lambda},$$

où r n'a aucun facteur commun avec f; car, si l'on prend

$$q \equiv \gamma^k,$$

la condition

$$q^f \equiv 1$$

donne

$$\gamma^{kf} \equiv 1;$$

il suit de là

$$kf \equiv 0 \pmod{\lambda - 1},$$

et puisque

$$\lambda - 1 = ef,$$

on a

$$k \equiv 0 \pmod{e},$$

ou

$$k = re$$

et

$$q \equiv \gamma^{re} \pmod{\lambda}.$$

On voit aussi qu'à cause de la condition que q *appartienne* à l'exposant f, le nombre r doit être premier à f; car, si r et f avaient un facteur commun n, on pourrait poser

$$r = nr' \quad \text{et} \quad f = nf',$$

on aurait ainsi

$$q^{f'} \equiv \gamma^{nr'ef'} \equiv \gamma^{r'(\lambda-1)} \equiv 1 \pmod{\lambda},$$

et la puissance $q^{f'}$, inférieure à q^f, serait congrue à l'unité, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, nous élevons le nombre complexe

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \ldots + a_{\lambda-2}\alpha^{\lambda-2}$$

à la puissance q. En rejetant tous les termes divisibles par q, nous aurons

$$f(\alpha)^q \equiv a^q + a_1^q\alpha^q + a_2^q\alpha^{2q} + \ldots + a_{\lambda-2}^q\alpha^{(\lambda-2)q} \pmod{q}.$$

Donc, en observant que

$$a_k^q \equiv a_k \pmod{q},$$

on a la congruence

$$f(\alpha)^q \equiv f(\alpha^q) \pmod{q},$$

et, en répétant la même opération, on a plus généralement

$$f(\alpha)^{q^h} \equiv f(\alpha^{q^h}) \pmod{q}.$$

Mettant à présent

$$h = 0, 1, 2, \ldots, f-1,$$

et multipliant toutes ces congruences, on a

$$f(\alpha)^{1+q+q^2+\ldots+q^{f-1}} \equiv f(\alpha)\, f(\alpha^q)\, f(\alpha^{q^2}) \ldots f(\alpha^{q^{f-1}}) \pmod{q},$$

et, en prenant

$$q \equiv \gamma^{re} \pmod{\lambda},$$

et changeant α en $\alpha^{\gamma^{m}}$, cette congruence devient

$$f\left(\alpha^{\gamma^{m}}\right)^{1+q+q^2+\ldots+q^f} \equiv f\left(\alpha^{\gamma^{m}}\right).f\left(\alpha^{\gamma^{m+e}}\right).f\left(\alpha^{\gamma^{m+2re}}\right)\ldots f\left(\alpha^{\gamma^{m+(f-1)e}}\right).$$

Prenons maintenant, pour m, e valeurs incongrues par rapport au module e, et multiplions ces e congruences; nous aurons

$$\left[\Pi f\left(\alpha^{\gamma^{m}}\right)\right]^{1+q+q^2+\ldots+q^{f-1}} \equiv \mathrm{N} f(\alpha) \pmod{q}.$$

où le signe du produit Π s'étend à toutes les valeurs du nombre m qui sont incongrues par rapport au module e. D'où, en supposant $\mathrm{N} f(\alpha)$ divisible par q,

$$\left[\Pi f\left(\alpha^{\gamma^{m}}\right)\right]^{1+q+q^2+\ldots+q^{f-1}} \equiv 0 \pmod{q}.$$

En élevant à la puissance $q-1$, multipliant par $\Pi f\left(\alpha^{\gamma^{m}}\right)$ et observant que, pour tout nombre complexe, l'on a

$$\varphi(\alpha)^{q^f} \equiv \varphi(\alpha) \pmod{q},$$

on obtient enfin

$$\Pi f\left(\alpha^{\gamma^{m}}\right) \equiv 0 \pmod{q},$$

et de là le théorème suivant :

Si la norme d'un nombre complexe $f(\alpha)$ est divisible par q (nombre premier qui appartient à l'exposant f), il faut que le produit de e à e des $\lambda - 1$ nombres conjugués représentés par $f\left(\alpha^{\gamma^{m}}\right)$, pour lesquels m n'ait que des valeurs incongrues par rapport au module e, soit divisible par q.

De ce théorème il suit aussi, comme corollaire :

Si la norme d'un nombre complexe $f(\alpha)$ est divisible par un nombre premier q qui appartient à l'exposant f, il faut qu'elle contienne ce facteur f fois, de manière qu'elle soit toujours divisible par q^f.

Cherchons maintenant les conditions qui doivent avoir lieu entre

les coefficients du nombre complexe $f(\alpha)$ pour que sa norme soit divisible par q. On sait que toutes les f racines de l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{q-1} = 0,$$

qui sont contenues dans une seule période à f termes, sont en même temps les racines d'une équation du degré f de la forme

$$\alpha^f + P_1 \alpha^{f-1} + P_2 \alpha^{f-2} + \ldots + P_f = 0,$$

dont les coefficients P_1, P_2, etc., sont des fonctions entières et rationnelles des périodes

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \quad \eta_{e-1}.$$

Au moyen de cette équation, on pourra éliminer toutes les puissances de α supérieures à α^{f-1} de l'expression du nombre complexe

$$f(\alpha) = a + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha^3 + \ldots + a_{q-1} \alpha^{q-1};$$

donc on aura cette forme

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha \varphi_1(\eta) + \alpha^2 \varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1} \varphi_{f-1}(\eta),$$

où

$$\varphi(\eta), \quad \varphi_1(\eta), \quad \varphi_2(\eta), \ldots, \quad \varphi_{f-1}(\eta)$$

désignent des nombres entiers complexes contenant les périodes seules. On voit aussi qu'un nombre complexe donné n'aura jamais deux représentations différentes par cette forme.

Cela posé, nous considérons le produit des e facteurs :

$$\left[c_0 f(\alpha) + c_1 f(\alpha^{i}) + c_2 f(\alpha^{i^2}) + \ldots + c_{f-1} f(\alpha^{i^{f-1}})\right]$$

$$\left[c_0 f(\alpha^{i}) + c_1 f(\alpha^{i^{2}}) + c_2 f(\alpha^{i^{3}}) + \ldots + c_{f-1} f(\alpha^{i^{f+1}})\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[c_0 f(\alpha^{i^{e-1}}) + c_1 f(\alpha^{i^{e}}) + c_2 f(\alpha^{i^{e+1}}) + \ldots + c_{f-1} f(\alpha^{i^{e+f-2}})\right].$$

En effectuant la multiplication on voit que tous les termes contiendront un de ces produits $\Pi f(\alpha^{i^m})$ où m a e valeurs incongrues par rapport au module e; donc, en vertu du théorème que nous venons de démontrer, le produit proposé sera divisible par q en même temps

que $N f(\alpha)$, quelles que soient les quantités

$$c,\quad c_1,\quad c_2, \ldots,\quad c_{f-1}.$$

Prenons pour $f(\alpha)$ la forme

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) + \alpha\varphi_1(\alpha) + \alpha^2\varphi_2(\alpha) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\alpha),$$

et pour $f(\alpha^q)$, $f(\alpha^{q^2})$, etc., les expressions qu'on déduit de celle-ci en changeant α en α^q, α^{q^2}, etc. Posons de plus

$$c + c_1 + c_2 + \ldots + c_{f-1} = C,$$

$$\alpha c + \alpha^{q} c_1 + \alpha^{q^2} c_2 + \ldots + \alpha^{q^{f-1}} c_{f-1} = C_1,$$

$$\alpha^2 c + \alpha^{2q} c_2 + \alpha^{2q^2} c_2 + \ldots + \alpha^{2q^{f-1}} c_{f-1} = C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^{f-1} c + \alpha^{(f-1)q} c_1 + \alpha^{(f-1)q^2} c_2 + \ldots + \alpha^{(f-1)q^{f-1}} c_{f-1} = C_{f-1},$$

nous aurons cette transformation du produit proposé,

$$[C\varphi(\alpha) + C_1\varphi_1(\alpha) + C_2\varphi_2(\alpha) + \ldots + C_{f-1}\varphi_{f-1}(\alpha)]$$
$$\times [C\varphi(\alpha_1) + C_1\varphi_1(\alpha_1) + C_2\varphi_2(\alpha_1) + \ldots + C_{f-1}\varphi_{f-1}(\alpha_1)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times [C\varphi(\alpha_{f-1}) + C_1\varphi_1(\alpha_{f-1}) + C_2\varphi_2(\alpha_{f-1}) + \ldots + C_{f-1}\varphi_{f-1}(\alpha_{f-1})],$$

qui sera divisible par q en même temps que $N f(\alpha)$ pour toutes les valeurs des quantités

$$C,\quad C_1,\quad C_2, \ldots,\quad C_{f-1},$$

qui sont tout à fait arbitraires aussi bien que

$$c,\quad c_1,\quad c_2, \ldots,\quad c_{f-1}.$$

Ce produit étant une norme prise par rapport aux périodes, pour qu'il soit divisible par q il faut et il suffit qu'on ait

$$C\varphi(u_r) + C_1\varphi_1(u_r) + C_2\varphi_2(u_r) + \ldots + C_{f-1}\varphi_{f-1}(u_r) = 0 \mod. q$$

pour quelqu'une des valeurs de

$$r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ e-1,$$

et parce que les coefficients

$$C,\quad C_1,\quad C_2, \ldots,\quad C_{f-1}$$

sont arbitraires, il faut qu'on ait séparément les f congruences

$$\varphi(u_r) \equiv 0,\quad \varphi_1(u_r) \equiv 0, \ldots,\quad \varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q).$$

On a donc ce théorème :

Si la norme d'un nombre complexe $f(\alpha)$ est divisible par un nombre premier q, qui appartient à l'exposant f pour le module λ, il faut que les f congruences

$$\varphi(u_r) \equiv 0,\quad \varphi_1(u_r) \equiv 0,\quad \varphi_2(u_r) \equiv 0, \ldots,\quad \varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q).$$

qu'on obtient en mettant le nombre $f(\alpha)$ sous la forme

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta).$$

et remplaçant les e périodes à f termes par les racines de congruences correspondantes, aient lieu pour une certaine valeur de r. Réciproquement, si ces f congruences ont lieu, la norme de $f(\alpha)$ sera divisible par q.

On peut aussi déterminer la condition pour que la norme d'un nombre complexe $f(\alpha)$ soit divisible par q, en faisant

$$f(\alpha) \cdot f(\alpha^{\gamma}) \cdot f(\alpha^{\gamma^2}) \ldots f(\alpha^{\gamma^{f-1}}) = F(\eta).$$

Ce produit étant une fonction symétrique de toutes les racines contenues dans l'une des périodes ne sera qu'une fonction des périodes, à cause de quoi nous l'avons désigné par $F(\eta)$. Il suit de là

$$Nf(\alpha) = F(\eta) \cdot F(\eta_1) \cdot F(\eta_2) \ldots F(\eta_{e-1}),$$

et, par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que $Nf(\alpha)$ soit divisible par q revient simplement à ce que $F(u_r)$ soit divisible par q pour une certaine valeur de r. Ainsi, la même con-

dition pour laquelle nous avons trouvé les f congruences

$$\varphi(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_1(u_r) \equiv 0, \quad \text{etc.},$$

linéaires par rapport aux coefficients du nombre complexe $f(\alpha)$, est exprimée par la seule congruence du degré f,

$$F(u_r) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q).$$

Si pour un nombre complexe quelconque

$$f(\alpha) = \varphi(\eta) + \alpha\varphi_1(\eta) + \alpha^2\varphi_2(\eta) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(\eta),$$

les f congruences

$$\varphi(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_1(u_r) \equiv 0, \ldots, \quad \varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q)$$

ont lieu, nous dirons simplement que ce nombre complexe $f(\alpha)$ est congru à zéro, par rapport au module q, pour

$$\eta = u_r, \quad \eta_1 = u_{r+1}, \quad \eta_2 = u_{r+2}, \ldots, \quad \eta_{e-1} = u_{r-1},$$

où il suffira aussi d'écrire seulement la condition

$$\eta = u_r$$

qui entraîne les autres.

Cela posé, il est évident qu'un des facteurs d'un produit de deux ou de plusieurs nombres complexes étant congru à zéro pour $\eta = u_r$, il en sera de même du produit développé; mais le théorème réciproque exige une démonstration particulière. Soit donc

$$f(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) = \chi(\alpha),$$

et, par hypothèse,

$$\chi(\alpha) \equiv 0 \ (\text{mod. } q) \quad \text{pour} \quad \eta = u_r;$$

nous prouverons que l'un des deux facteurs $f(\alpha)$ ou $\varphi(\alpha)$ doit être aussi congru à zéro pour $\eta = u_r$. En effet, en posant

$$f(\alpha) \cdot f\left(\alpha^{\gamma^e}\right) \cdot f\left(\alpha^{\gamma^{2e}}\right) \ldots f\left(\alpha^{\gamma^{(f-1)e}}\right) = F(\eta),$$

$$\varphi(\alpha) \cdot \varphi\left(\alpha^{\gamma^e}\right) \cdot \varphi\left(\alpha^{\gamma^{2e}}\right) \ldots \varphi\left(\alpha^{\gamma^{(f-1)e}}\right) = \Phi(\eta),$$

$$\chi(\alpha) \cdot \chi\left(\alpha^{\gamma^e}\right) \cdot \chi\left(\alpha^{\gamma^{2e}}\right) \ldots \chi\left(\alpha^{\gamma^{(f-1)e}}\right) = X(\eta).$$

on aura

$$F(z)\Phi(z) = X(z),$$

et puisque par l'hypothèse $\chi(\alpha)$ est congru à zéro pour $z = u_r$, on aura aussi

$$X(u_r) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Il suit de là que l'un des nombres $F(u_r)$ ou $\Phi(u_r)$ doit de même être congru à zéro, et, en remplaçant la congruence

$$F(u_r) \equiv 0 \pmod{q}$$

par les f congruences équivalentes, qu'on est convenu d'exprimer par

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad z = u_r,$$

on en conclut ce théorème :

La condition

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q}$$

pour $z = u_r$ est toujours la même pour un nombre complexe, soit qu'il consiste de facteurs, soit qu'il ait la forme développée.

De là découle aussi cet autre théorème, qu'on peut regarder comme une généralisation du premier théorème de ce paragraphe, parce qu'il donne, pour les nombres complexes quelconques $f(\alpha)$, la même condition que cet autre pour les nombres complexes des périodes :

Pour qu'un nombre complexe quelconque, représenté comme produit de plusieurs facteurs, soit divisible par q, il faut et il suffit que, pour toutes les substitutions

$$z = u_r, \quad z = u_1, \quad z = u_2, \ldots, \quad z = u_{e-1},$$

un de ses facteurs soit congru à zéro pour le module q.

Nous terminerons cette discussion des facteurs premiers de la norme d'un nombre complexe quelconque, en montrant encore une autre manière très-simple et très-utile d'exprimer les f congruences contenues dans l'énoncé

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad z = u_r.$$

Pour cela, nous avons besoin d'un nombre complexe contenant les périodes seules dont la norme, prise par rapport aux périodes, soit divisible par q sans être divisible par q^2. De tels nombres existent toujours, et à l'ordinaire ils s'offrent d'eux-mêmes; par exemple, parmi les simples nombres

$$u - \eta_0, \quad u_1 - \eta_1, \quad u_2 - \eta_2, \ldots, \quad u_{e-1} - \eta_{e-1},$$

dont les normes sont toutes divisibles par q, il y en aura presque toujours plusieurs qui satisferont à la condition requise; mais dans certains cas il se pourrait que les normes de tous ces nombres fussent aussi divisibles par q^2. Alors on fera usage du nombre complexe

$$\psi(\eta) = \lambda - f - u\eta_0 - u_1\eta_1 - u_2\eta_2 - \ldots - u_{e-1}\eta_{e-1}.$$

En remplaçant les périodes par les racines des congruences, on a toujours

$$\psi(u_r) \equiv \lambda \pmod{q},$$

à l'exception des deux cas : 1° de f pair et $r = 0$, où l'on a

$$\psi(u) \equiv 0;$$

2° de f impair et $r = \frac{1}{2}e$, où l'on a

$$\psi\left(\frac{u_r}{2}\right) \equiv 0.$$

De là, en appliquant le premier et le second théorème de ce paragraphe, on conclut que $N\psi(\eta)$ est toujours divisible par q, mais que le produit

$$\Psi(\eta) = \psi(\eta_1) \cdot \psi(\eta_2) \cdot \psi(\eta_3) \ldots \psi(\eta_{e-1})$$

n'est pas divisible par q. Observons aussi que le produit $\Psi(\eta_r)\Psi(\eta_s)$, tant que r et s ne sont pas égaux, contient toujours tous les facteurs de la norme $N\psi(\eta)$, et que, par conséquent, il est divisible par q. Cela étant, développons la norme de $\psi(\eta) + q$, en rejetant tous les termes divisibles par q^2, ce qui donne

$$N[\psi(\eta) + q]$$
$$= N\psi(\eta) + q[\Psi(\eta) + \Psi(\eta_1) + \ldots + \Psi(\eta_{e-1})] \pmod{q^2}$$

multipliant encore par $\Psi(\eta)$ et rejetant les termes divisibles par q^2, nous aurons

$$\Psi(\eta)\,\mathrm{N}[\psi(\eta)+q] \equiv \Psi(\eta)\,\mathrm{N}\psi(\eta) + q[\Psi(\eta)]^2 \pmod{q^2}.$$

Maintenant, si $\mathrm{N}\psi(\eta)$ n'est pas divisible par q^2, mais seulement par q, $\psi(\eta)$ est un nombre complexe tel qu'on le désire. Mais s'il arrivait que $\mathrm{N}\psi(\eta)$ contînt le facteur q^2, on aurait

$$\Psi(\eta)\,\mathrm{N}[\psi(\eta)+q] \equiv q[\Psi(\eta)]^2 \pmod{q^2};$$

on voit que la norme du nombre complexe $\psi(\eta)+q$ ne pourrait être divisible par q^2. Ainsi, l'un des deux nombres complexes $\psi(\eta)$ ou $\psi(\eta)+q$ satisfait toujours à la condition exigée.

Soit donc $\psi(\eta)$ un nombre complexe, tel qu'on ait

$$\mathrm{N}\psi(\eta) \equiv 0 \pmod{q},$$

sans que

$$\mathrm{N}\psi(\eta) \equiv 0 \pmod{q^2};$$

soit aussi

$$\psi(u) \equiv 0 \pmod{q},$$

et posons, pour abréger,

$$\psi(\eta_1).\psi(\eta_2).\psi(\eta_3)\ldots\psi(\eta_{e-1}) = \Psi(\eta),$$

je dis que *les f congruences comprises dans l'énoncé*

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q}$$

pour $\eta = u$, sont équivalentes à la congruence

$$f(\alpha)\,\Psi(\eta_{e-r}) \equiv 0 \pmod{q}.$$

En effet, d'après les principes établis dans le § III, on conclut de l'expression de $\Psi(\eta)$,

$$\Psi(u_r) = \psi(u_{r+1}).\psi(u_{r+2})\ldots\psi(u_{r-1}) \pmod{q};$$

et puisqu'on a

$$\psi(u) \equiv 0 \pmod{q},$$

on voit qu'on aura toujours

$$\Psi(u_r) \equiv 0,$$

excepté le seul cas $r = 0$. Or nous savons que, pour avoir

$$f(\alpha)\,\Psi(\eta_{e-r}) \equiv 0 \pmod{q},$$

il faut et il suffit qu'on ait pour chacune des suppositions

$$\eta = u_0, \quad \eta = u_1, \quad \eta = u_2, \ldots, \quad \eta = u_{r-1}$$

ou

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q},$$

ou

$$\Psi(\eta_{(r)}) \equiv 0 \pmod{q}$$

et puisque, pour $\eta = u_r$, le second facteur, qui devient $\Psi(u)$, n'est pas congru à zéro, il s'ensuit nécessairement

$$f(\alpha) \equiv 0$$

pour $\eta = u_r$. Réciproquement, si l'on a

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q}$$

pour $\eta = u_r$, le produit $f(\alpha)\Psi(\eta_{(r)})$ est divisible par q, parce que pour $\eta = u_r$ le premier facteur $f(\alpha)$, et pour toutes les autres substitutions

$$\eta = u_0, \quad \eta = u_1, \ldots, \quad \eta = u_{r-1}, \quad \eta = u_{r+1}, \ldots, \quad \eta = u_{q-1}$$

le second facteur $\Psi(\eta_{(r)})$ est congru à zéro.

§ V.

Définition et propriétés générales des facteurs idéaux d'un nombre complexe.

Au moyen des résultats trouvés dans le paragraphe précédent, nous serons en état d'assigner tous les nombres complexes dont les normes ont un facteur premier donné; voyons maintenant si, parmi tous ces nombres complexes, il y en a un ou plusieurs dont les normes soient *égales* à ce nombre premier même. D'abord nous savons que quand la norme d'un nombre complexe $f(\alpha)$, prise par rapport aux racines α, est divisible par le nombre premier q qui appartient à l'exposant f, elle ne peut pas être égale à q, à moins qu'on n'ait

$$f = 1,$$

c'est-à-dire à moins que q, appartenant à l'exposant 1, n'ait la forme

linéaire

$$q = m\lambda + 1.$$

Cela tient à ce que toute norme est de la forme linéaire $m\lambda + 1$ ou à ce que toute norme divisible par q doit avoir le facteur q^f. Mais parmi les nombres complexes contenant les périodes à f termes, il pourra y en avoir dont les normes prises par rapport aux périodes soient égales au nombre premier q. Donc, il se pourra qu'un nombre premier q, appartenant à l'exposant f, soit décomposable en e facteurs conjugués contenant les périodes à f termes, en sorte qu'on ait

$$\varphi(\pi_0)\cdot\varphi(\pi_1)\cdot\varphi(\pi_2)\ldots\varphi(\pi_{e-1}) = N\varphi(\pi) = q,$$

et en particulier, pour le cas de $f = 1$, il se pourra qu'un nombre premier p de la forme $m\lambda + 1$ soit égal à la norme d'un nombre complexe $f(\alpha)$, en sorte qu'on ait

$$f(\alpha)\cdot f(\alpha^2)\cdot f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{e-1}) = Nf(\alpha) = p.$$

Mais il s'en faut de beaucoup que chaque nombre premier appartenant à l'exposant f soit décomposable en e facteurs premiers complexes. On distinguera plutôt deux classes de tous les nombres premiers, les uns qui peuvent être représentés comme normes, ainsi que nous venons de l'expliquer, les autres qui n'admettent pas une telle décomposition en facteurs conjugués.

En supposant toujours q premier et appartenant à l'exposant f, sans exclure le cas de $f = 1$, nous aurons pour un nombre q de la première classe,

$$\varphi(\pi_0)\cdot\varphi(\pi_1)\cdot\varphi(\pi_2)\ldots\varphi(\pi_{e-1}) = N\varphi(\pi) = q.$$

Le nombre complexe $\varphi(\pi)$, dont la norme est un nombre premier, n'admet aucune décomposition ultérieure en deux facteurs, sans que l'un de ces facteurs soit une unité complexe. En effet, si l'on avait

$$\varphi(\pi) = F(\alpha)\cdot G(\alpha),$$

en prenant la norme par rapport aux racines α, on aurait

$$N\varphi(\pi) = q^f = NF(\alpha)\cdot NG(\alpha).$$

et puisque l'une de ces deux normes, par exemple $NF(\alpha)$, divisible par q, doit être divisible par q', on aura nécessairement

$$NF(\alpha) = q' \quad \text{d'où} \quad NG(\alpha) = 1,$$

ou bien $G(\alpha)$ sera une unité complexe. Pour cette raison, tout nombre complexe $\varphi(\eta)$, dont la norme est un nombre premier, sera appelé *nombre premier complexe*. Ainsi, tout nombre premier non complexe q de notre première classe se compose de e facteurs *premiers complexes*.

Pour distinguer les facteurs premiers du nombre q, nous ferons usage des nombres

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_e$$

correspondants aux périodes. En les substituant, on aura pour une certaine valeur de r,

$$\varphi(u_r) \equiv 0 \pmod{q}$$

condition nécessaire pour que la norme de $\varphi(\eta)$ soit divisible par q; on voit par là que, pour tous les divers facteurs premiers de q, on a

$$\varphi(\eta_0) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad r = u_0,$$
$$\varphi(\eta_1) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad r = u_1,$$
$$\varphi(\eta_2) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad r = u_2,$$

et généralement

$$\varphi(\eta_k) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad r = u_k.$$

Nous distinguerons donc les e facteurs premiers conjugués du nombre q selon les racines de congruences qui doivent être choisies comme correspondantes aux périodes pour que chacun de ces facteurs premiers complexes soit congru à zéro pour le module q.

Lorsqu'on multiplie un nombre premier complexe $\varphi(\eta)$, pour lequel on a

$$\varphi(\eta) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad r = u_r,$$

par un nombre complexe quelconque $f(\alpha)$, le produit développé

$$\varphi(\eta) f(\alpha) = F(\alpha)$$

satisfera toujours à

$$F(\alpha) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad r = u_r.$$

Réciproquement, si un nombre complexe $f(\alpha)$ satisfait à

$$F(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad \nu = u_r,$$

je dis qu'il contiendra nécessairement le facteur premier $\varphi(\nu)$. En effet, le nombre $\varphi(\nu_r)$, dont la norme est égale à q et qui est congru à zéro pour $\nu = u$, est un de ces nombres complexes que nous avons désignés par $\psi(\nu)$ dans le paragraphe précédent, à l'aide desquels la condition

$$F(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad \nu = u,$$

s'exprime par la simple congruence

$$F(\alpha)\Psi(\nu_{e-r}) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Prenant donc

$$\varphi(\nu_r) = \psi(\nu)$$

et

$$\Psi(\nu) = \varphi(\nu_{r+1}) \cdot \varphi(\nu_{r+2}) \cdots \varphi(\nu_{e-1}),$$

et, par conséquent,

$$\Psi(\nu_{e-r}) = \varphi(\nu_1) \cdot \varphi(\nu_2) \cdot \varphi(\nu_3) \cdots \varphi(\nu_{e-1}),$$

de l'hypothèse

$$F(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad \nu = u_r,$$

on conclut

$$F(\alpha) \cdot \varphi(\nu_1) \cdot \varphi(\nu_2) \cdots \varphi(\nu_{e-1}) \equiv 0 \pmod{q};$$

on pourra donc poser

$$F(\alpha) \cdot \varphi(\nu_1) \cdot \varphi(\nu_2) \cdots \varphi(\nu_{e-1}) = q f(\alpha);$$

enfin, en multipliant par $\varphi(\nu)$ et divisant par

$$\varphi(\nu) \cdot \varphi(\nu_1) \cdot \varphi(\nu_2) \cdots \varphi(\nu_{e-1}) = q,$$

on aura

$$F(\alpha) = \varphi(\nu) f(\alpha).$$

Donc, $F(\alpha)$ a effectivement le facteur $\varphi(\nu)$. Nous voyons par là que la condition

$$F(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad \nu = u,$$

définit complètement un facteur premier complexe $\varphi(\nu)$, contenu dans le nombre $F(\alpha)$ toutes les fois que le nombre premier $\varphi(\nu)$ existe

réellement, c'est-à-dire que q est décomposable en e facteurs premiers conjugués.

Supposons à présent que q soit un nombre premier qui n'admet pas de décomposition en e facteurs conjugués, ou qui ne saurait être représenté comme norme d'un nombre complexe contenant les périodes à f termes. Alors on ne pourra plus isoler un facteur premier d'un nombre complexe $f(\alpha)$ satisfaisant à la condition

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad \eta = u_r,$$

mais nous dirons néanmoins que ce nombre complexe contient un facteur premier complexe du nombre q, que nous appellerons *facteur premier idéal* du nombre premier q; et puisque nous avons vu que les e facteurs premiers du nombre q, s'ils existent effectivement, sont distingués en ce que chacun d'entre eux devient congru à zéro pour une certaine substitution des racines de congruences au lieu des périodes, nous désignerons ce facteur premier idéal de q comme *appartenant à la substitution* $\eta = u_r$. Un tel facteur idéal, qui ne subsiste pas par soi-même, mais qui a une existence effective dans la combinaison avec les autres facteurs du nombre complexe, dans lequel il est contenu, sera donc défini complétement comme il suit :

Si un nombre complexe $f(\alpha)$ satisfait à la condition

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \textit{pour} \quad \eta = u_r,$$

nous dirons qu'il contient le facteur premier idéal du nombre premier q qui appartient à la substitution $\eta = u_r$.

Quoiqu'il n'y ait rien d'obscur dans la définition, nous allons expliquer rapidement pourquoi nous avons désigné cette condition de congruence de $f(\alpha)$ par le nom de *facteur idéal* de ce nombre complexe, tout en observant que les développements seuls de la théorie pourront justifier une telle innovation. A cause de l'analogie frappante qui règne entre les facteurs premiers idéaux et les facteurs complexes ordinaires, la dénomination servira à simplifier extrêmement les énoncés des théorèmes. Mais cela ne constitue pas l'avantage principal de la théorie nouvelle; nous croyons surtout que les facteurs

idéaux rendent visible, pour ainsi dire, la constitution intérieure des nombres, en sorte que leurs propriétés essentielles soient mises dans leur jour. Un nombre complexe satisfaisant à plusieurs des conditions que nous regardons comme facteurs idéaux de ce nombre, quoiqu'il ne soit pas décomposable en facteurs complexes, se comporte tout à fait comme un nombre composé, et c'est pour cela que nous le considérons en quelque sorte comme un produit de facteurs. L'Algèbre, l'Arithmétique et la Géométrie offrent des analogies nombreuses à notre théorie. On décompose, par exemple, les fonctions rationnelles et entières d'une seule variable en facteurs linéaires, quoique ces facteurs isolés n'existent qu'en des cas particuliers; c'est pour ce but qu'on a créé les quantités imaginaires. En Géométrie, on parle d'une droite passant par les points d'intersection de deux cercles, quand même les points d'intersection n'existent pas. Dans cet exemple, la propriété permanente que les tangentes menées d'un point quelconque de cette ligne aux deux cercles, sont égales entre elles, est l'analogie de la propriété permanente du nombre complexe

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad \alpha = \alpha,$$

et la propriété accidentelle de cette ligne, de passer par les points d'intersection des deux cercles, est de même analogue à la propriété accidentelle du nombre complexe $f(\alpha)$, d'avoir un facteur premier existant $\varphi(\alpha)$. Enfin, l'idée de considérer des facteurs idéaux des nombres complexes est, au fond, la même que celle qui a procréé les nombres complexes eux-mêmes. En effet, on sait que M. Gauss, en observant que, dans la recherche des lois de réciprocité entre les résidus biquadratiques, les nombres premiers de la forme $4n+1$ se comportaient comme nombres composés, les a décomposés en facteurs imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$, et qu'il a jeté par là les fondements de la théorie générale des nombres complexes.

Nous avons fixé le sens d'un facteur premier idéal d'un nombre complexe $f(\alpha)$ par la condition

$$f(\alpha) \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{pour} \quad \alpha = \alpha,$$

qui en elle-même n'est qu'une manière concise d'exprimer que les f

congruences

$$\varphi(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_1(u_r) \equiv 0, \quad \varphi_2(u_r) \equiv 0, \ldots, \quad \varphi_{f-1}(u_r) \equiv 0 \pmod{q}$$

ont lieu en même temps, congruences qu'on obtient en mettant le nombre $f(\alpha)$ sous la forme

$$f(\alpha) = \varphi(u) + \alpha\varphi_1(u) + \alpha^2\varphi_2(u) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(u),$$

et remplaçant les périodes par les racines des congruences correspondantes. Nous savons aussi que ces f congruences sont comprises dans cette seule,

$$f(\alpha)\Psi(u_{e-1}) \equiv 0 \pmod{q},$$

où $\Psi(u)$ désigne le produit de $e-1$ facteurs

$$\Psi(u) = \psi(u_1).\psi(u_2)\ldots\psi(u_{e-1}),$$

$\psi(u)$ étant un nombre complexe qui donne

$$\psi(u) \equiv 0 \pmod{q},$$

et dont la norme, divisible par q, ne soit pas divisible par q^2. Nous pouvons donc énoncer la définition des facteurs premiers idéaux comme il suit :

Si le nombre complexe $f(\alpha)$ satisfait à la congruence

$$f(\alpha)\Psi(u_{e-1}) \equiv 0 \pmod{q},$$

où $\Psi(u)$ désigne le produit des $e-1$ facteurs

$$\Psi(u) = \psi(u_1).\psi(u_2)\ldots\psi(u_{e-1}),$$

et $\psi(u)$ un nombre complexe tel qu'on ait

$$\psi(u) \equiv 0 \pmod{q},$$

et dont la norme, divisible par q, ne soit pas divisible par q^2, nous dirons que $f(\alpha)$ contient le facteur premier idéal du nombre q, qui appartient à la substitution $u = u_r$.

Pour introduire la multiplicité d'un facteur premier idéal, nous généralisons la définition précédente comme il suit :

Le nombre complexe $f(\alpha)$ est censé contenir exactement n fois

le facteur premier idéal du nombre q, qui appartient à la substitution $x = u_r$, lorsqu'il satisfait à la congruence

$$f(\alpha)[\Psi(x_{r+1})]^n \equiv 0 \pmod{q^n},$$

sans que la congruence

$$f(\alpha)[\Psi(x_{r+1})]^{n-1} \equiv 0 \pmod{q^{n-1}}$$

ait lieu.

Nous remarquons aussi que la notion du nombre ou facteur complexe idéal sera employée aussi bien dans le sens plus large où les nombres complexes *existants*, comme cas particuliers, sont compris parmi les nombres complexes *idéaux*, que dans le sens plus étroit où les nombres *idéaux* signifient le contraire des nombres complexes *existants*, de même que, dans l'Algèbre, le mot *imaginaire* est employé dans ce double sens.

La condition qu'un nombre complexe contienne un facteur premier idéal multiple s'exprime encore par des congruences linéaires par rapport aux coefficients de ce nombre complexe. En mettant $f(\alpha)$ sous la forme

$$f(\alpha) = \varphi(x) + \alpha\varphi_1(x) + \alpha^2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(x),$$

et supposant que $f(\alpha)$ contient n fois le facteur premier idéal de q, appartenant à la substitution $x = u_r$, on aura

$$[\Psi(x_{r+1})]^n[\varphi(x) + \alpha\varphi_1(x) + \alpha^2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha^{f-1}\varphi_{f-1}(x)] \equiv 0$$

pour le module q^n. On en conclut aisément que les f congruences contenues dans la formule

$$[\Psi(x_{r+1})]^n\varphi_k(x) \equiv 0 \pmod{q^n},$$

doivent avoir lieu séparément pour

$$k = 0, 1, 2, \ldots, f-1.$$

En réduisant à la forme linéaire, on aura

$$[\Psi(x_{r+1})]^n\varphi_k(x) = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_{r-1}x_{r-1},$$

ce qui donne

$$\Psi(x_{r+1})^n\varphi_k(x) = (\Psi(x_{r+1})^n\varphi_k(x_1) + \ldots + (\Psi(x_{r+1})^n\varphi_k(x_{r-1})$$
$$= (C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{r-1}).$$

Multipliant encore par $[\Psi(\nu_{e-r})]^n$, et observant que le produit $\Psi(\nu_r)\Psi(\nu_s)$ est toujours divisible par q, excepté le seul cas de $r = s$, on aura la congruence

$$(\Psi\nu_{e-r})^{2n}\varphi_k(\nu) \equiv -(C + C_1 + C_2 + \ldots + C_{e-1})(\Psi\nu_{e-r})^n \pmod{q^n}.$$

Il suit de là que la condition

$$(\Psi\nu_{e-r})^n\varphi_k(\nu) \equiv 0 \pmod{q^n}$$

est équivalente à la congruence

$$C + C_1 + C_2 + \ldots + C_{e-1} \equiv 0 \pmod{q^n}.$$

qui est linéaire par rapport aux coefficients de $f(\alpha)$. Ainsi, la condition qu'un nombre complexe contienne n fois un facteur premier de q est exprimée par f congruences linéaires par rapport aux coefficients du nombre $f(\alpha)$ pour le module q^n.

Nous allons maintenant démontrer les théorèmes élémentaires pour le calcul des facteurs idéaux, qui seront entièrement les mêmes que pour les facteurs existants. Pour cela, nous proposons d'abord ce théorème :

Le produit de deux ou de plusieurs nombres complexes a précisément les mêmes facteurs premiers idéaux ou existants que les facteurs pris ensemble.

Soient $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ deux nombres complexes et $h(\alpha)$ leur produit, en sorte qu'on ait

$$f(\alpha).g(\alpha) = h(\alpha);$$

si le facteur premier idéal de q, qui appartient à la substitution $\nu = u_r$, est contenu précisément n fois dans $f(\alpha)$ et ν fois dans $g(\alpha)$, je dis qu'il sera contenu $n + \nu$ fois précisément dans $h(\alpha)$. D'après l'hypothèse, on a

$$f(\alpha)[\Psi(\nu_{e-r})]^n = q^n F(\alpha)$$

et

$$g(\alpha)[\Psi(\nu_{e-r})]^\nu = q^\nu G(\alpha),$$

où $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$ ne sont pas congrus à zéro pour $\nu = u_r$, puisqu'on

aurait alors

$$f(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^{n+1} \equiv 0 \pmod{q^{n+1}}$$

et

$$g(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^{v+1} \equiv 0 \pmod{q^{v+1}}.$$

De ces deux équations il suit

$$f(\alpha).g(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^{n+v} = h(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^{n+v} = q^{n+v}\,F(\alpha).G(\alpha).$$

En mulipliant de nouveau par $\Psi(\eta_{e-r})$, on a aussi

$$h(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^{n+v+1} = q^{n+v}\,F(\alpha).G(\alpha).\Psi(\eta_{e-r}),$$

et puisqu'aucun des trois facteurs du produit $F(\alpha).G(\alpha).\Psi(\eta_{e-r})$ n'est congru à zéro pour $\eta = u_r$, ce produit n'est pas divisible par q. On a donc

$$h(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^{n+v} \equiv 0 \pmod{q^{n+v}},$$

sans avoir

$$h(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^{n+v+1} \equiv 0 \pmod{q^{n+v+1}},$$

c'est-à-dire le produit $h(\alpha)$ contient le facteur premier idéal de q, qui appartient à la substitution $\eta = u_r$, $n+v$ fois précisément. Ce résultat donne sans peine la démonstration du théorème proposé, car tout ce que nous avons démontré pour le facteur premier idéal de q, qui appartient à la substitution $\eta = u_r$, subsiste de même pour tous les facteurs premiers idéaux, et puisqu'on peut regarder les deux facteurs eux-mêmes comme composés de facteurs, et ainsi de suite, on voit qu'il subsiste également pour un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

En faisant usage de la dénomination nouvelle de facteurs premiers idéaux, le théorème du paragraphe précédent, relatif à la condition qu'un nombre complexe $f(\alpha)$ soit divisible par q, pourra être énoncé comme il suit :

Pour qu'un nombre complexe quelconque, représenté comme produit

de plusieurs facteurs, soit divisible par q, il faut et il suffit qu'il contienne tous les e facteurs premiers idéaux du nombre q [*].

En supposant que dans le nombre $f(\alpha)$ chacun des facteurs premiers idéaux de q soit contenu n fois au moins, on aura les congruences

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)[\Psi(\eta)]^n \equiv 0, \\ f(\alpha)[\Psi(\eta_1)]^n \equiv 0, \ldots, \\ f(\alpha)[\Psi(\eta_{e-r})]^n \equiv 0, \end{array}\right\} \pmod{q^n},$$

et, en ajoutant ces congruences,

$$f(\alpha)[\Psi(\eta)]^n + [\Psi(\eta_1)]^n + \ldots + [\Psi(\eta_{e-1})]^n \equiv 0 \mod q^n.$$

Le second facteur de ce produit, comme fonction symétrique de toutes les périodes, sera un nombre entier non complexe; de plus, il n'est pas divisible par q, puisqu'aucun des facteurs idéaux de q n'y est contenu; il faut donc que le premier facteur soit divisible par q^n, ce qui donne cette généralisation du théorème précédent :

Un nombre complexe, contenant tous les facteurs premiers idéaux de q, chacun n fois au moins, est divisible par q^n.

Supposons maintenant que $f(\alpha)$ contienne n facteurs premiers idéaux de q, soit tous différents ou non, alors chacun des nombres

---

[*] Remarquons ici qu'au moyen de ce théorème on pourra reconnaître le motif de l'emploi des multiplicateurs désignés par $\Psi(\eta)$, qui consistent des $e-1$ facteurs

$$\psi(\eta_1).\psi(\eta_2)\ldots\psi(\eta_{e-1}).$$

En effet, la condition

$$\psi(u_r) \equiv 0 \mod q$$

fait voir que $\psi(\eta)$ contient le facteur premier idéal de q, qui appartient à la substitution $\eta = u_r$, et la condition que $N\psi(\eta)$ ne soit pas divisible par q^2 exclut tous les autres facteurs premiers idéaux du nombre premier q qui pourraient troubler le résultat. Il s'en suit que $\Psi(\eta_{e-r})$ contient tous les facteurs idéaux de q, à l'exception d'un seul, qui appartient à la substitution $\eta = u_r$. En multipliant donc par $\Psi(\eta_{e-r})$ un nombre donné $f(\alpha)$, contenant le facteur idéal de q, qui appartient à la substitution $\eta = u_r$, on aura un produit divisible par q, parce qu'il contient tous les facteurs idéaux de q; mais si le nombre $f(\alpha)$ ne contient pas ce facteur idéal, le produit ne sera jamais divisible par q, puisqu'un des facteurs idéaux du nombre q n'y est pas contenu.

conjugués

$$f(\alpha),\quad f(\alpha^{\gamma}),\quad f(\alpha^{\gamma^2}),\ldots,\quad f(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})$$

contiendra de même n facteurs idéaux de q, et le produit de ces $\lambda - 1$ nombres conjugués, c'est-à-dire la norme $\mathrm{N} f(\alpha)$, en contiendra $(\lambda - 1)n$. De plus, il est aisé de voir que tous ces facteurs idéaux dans la norme $\mathrm{N} f(\alpha)$ se trouveront en nombre égal; donc chacun d'entre eux s'y trouvera $\frac{n(\lambda-1)}{e}$ fois, ce qui est nf fois précisément. Donc, au moyen de la proposition précédente, on a le théorème très-important :

Si le nombre complexe $f(\alpha)$ contient n facteurs premiers idéaux du nombre q (appartenant à l'exposant f), soit que tous ces facteurs soient différents ou non, la norme $\mathrm{N} f(\alpha)$ contiendra toujours le facteur q^{nf}, mais elle ne contiendra jamais une puissance plus élevée de q.

Le nombre premier λ, le seul qui n'est pas contenu dans les nombres désignés par q, se décompose en $\lambda - 1$ facteurs premiers conjugués de la manière suivante :

$$1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^3)\ldots(1 - \alpha^{\lambda-1}) = \mathrm{N}(1 - \alpha) = \lambda$$

Pour s'assurer que $1 - \alpha^k$ est un nombre premier, on fera

$$1 - \alpha^k = f(\alpha).\varphi(\alpha);$$

d'où, en prenant les normes, on aura

$$\lambda = \mathrm{N} f(\alpha).\mathrm{N}\varphi(\alpha).$$

On en conclut que l'un des deux facteurs $\mathrm{N} f(\alpha)$ et $\mathrm{N}\varphi(\alpha)$ sera nécessairement égal à λ, l'autre égal à l'unité; donc, $1 - \alpha^k$ ne pouvant être décomposé en deux facteurs, sans que l'un d'eux soit une unité complexe, satisfait à la condition d'un nombre premier complexe. Les facteurs premiers de λ sont distingués des facteurs premiers complexes de tous les autres nombres premiers, parce qu'étant dégagés des unités complexes, ils sont tous égaux entre eux. En effet, on a

$$1 - \alpha^k = (1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{k-1}).$$

et $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{k-1}$ n'est qu'une unité complexe. Pour cette raison, il ne s'agira jamais de rechercher *quels* facteurs de λ, mais seulement *combien* de ces facteurs sont contenus dans un nombre complexe donné, et, pour cela, on n'aura qu'à chercher combien de fois la norme du nombre donné contient le facteur λ; car le nombre des facteurs premiers $1 - \alpha$, contenus dans un nombre complexe, est évidemment le même que le nombre des facteurs λ contenus dans sa norme.

Du théorème précédent, et de ce que nous avons remarqué des facteurs premiers du nombre λ, on conclut :

La norme d'un nombre complexe $f(\alpha)$ est toujours de la forme

$$\mathrm{N} f(\alpha) = \lambda^n q^{mf} . q'^{m'f'} . q''^{m''f''} \ldots,$$

où q, q', q'', etc., sont des nombres premiers appartenant respectivement aux exposants f, f', f'', etc., et n, m, m', m'', etc., sont des entiers positifs ou zéro.

En observant que la norme $\mathrm{N} f(\alpha)$ ne contient qu'un nombre fini de facteurs premiers λ, q, q', q''..., on voit que le nombre $f(\alpha)$ lui-même ne peut contenir qu'un nombre fini de facteurs premiers idéaux, qui seront aussi parfaitement déterminés par les définitions établies ci-dessus. Il en résulte ce théorème important :

Tout nombre complexe donné ne contient qu'un nombre fini de facteurs premiers idéaux parfaitement déterminés.

C'est surtout ce théorème qui justifie la notion des facteurs premiers idéaux, en montrant l'identité des règles du calcul des facteurs idéaux et des facteurs premiers de l'Arithmétique élémentaire, où le théorème analogue : Que tout nombre composé ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule manière, joue le même rôle principal.

Le théorème réciproque pourra s'énoncer comme il suit :

Deux nombres complexes, contenant les mêmes facteurs premiers idéaux, ne diffèrent que par des unités complexes, par lesquelles ils peuvent être multipliés.

En effet, supposons que $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ aient les mêmes facteurs pre-

miers idéaux, et soit

$$\mathrm{N} f(\alpha) = \mathrm{N}\varphi(\alpha) = \lambda^n . q^{mf} . q'^{m'f'} \ldots ;$$

alors le produit

$$f(\alpha) . \varphi\left(\alpha^{\gamma}\right) . \varphi\left(\alpha^{\gamma^2}\right) \ldots \varphi\left(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}\right)$$

contiendra nécessairement tous les facteurs premiers idéaux de $\mathrm{N}\varphi(\alpha)$: il contiendra $n(\lambda - 1)$ fois le facteur premier $1 - \alpha$, et, par conséquent, il sera divisible par λ^n; il contiendra aussi tous les facteurs premiers idéaux de q chacun mf fois, tous les facteurs premiers idéaux de q', chacun $m'f'$ fois, et ainsi de suite. Mais puisqu'un nombre complexe, contenant tous les facteurs premiers de q, n fois chacun, est divisible par q^n, il s'ensuit que le produit

$$f(\alpha) . \varphi\left(\alpha^{\gamma}\right) . \varphi\left(\alpha^{\gamma^2}\right) \ldots \varphi\left(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}\right)$$

est divisible par q^{mf}, $q'^{m'f'}$, etc., il sera donc divisible par $\mathrm{N}\varphi(\alpha)$. De là nous avons

$$\frac{f(\alpha) . \varphi\left(\alpha^{\gamma}\right) \varphi\left(\alpha^{\gamma^2}\right) \ldots \varphi\left(\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}\right)}{\mathrm{N}\varphi(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \mathrm{E}(\alpha),$$

$\mathrm{E}(\alpha)$ étant un entier complexe, et il s'ensuit

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha)\,\mathrm{E}(\alpha) \quad \text{et} \quad \mathrm{N} f(\alpha) = \mathrm{N}\varphi(\alpha)\,\mathrm{N}\mathrm{E}(\alpha) ;$$

d'où

$$\mathrm{N}\mathrm{E}(\alpha) = 1. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Pour qu'un nombre complexe $f(\alpha)$ soit divisible par $\varphi(\alpha)$, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers idéaux du diviseur $\varphi(\alpha)$ soient contenus dans le dividende $f(\alpha)$.

D'abord il est clair que $f(\alpha)$ ne sera jamais divisible par $\varphi(\alpha)$, à moins qu'il ne contienne tous les facteurs premiers idéaux de $\varphi(\alpha)$; car, si l'on a

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \mathrm{Q}(\alpha),$$

$\mathrm{Q}(\alpha)$ étant un entier, il s'ensuit

$$f(\alpha) = \mathrm{Q}(\alpha)\,\varphi(\alpha).$$

et, puisque le produit développé $f(\alpha)$ a tous les facteurs premiers idéaux des facteurs $Q(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$, pris ensemble, il faut que $f(\alpha)$ contienne tous les facteurs idéaux de $\varphi(\alpha)$. Pour démontrer que cette condition est suffisante, nous observons que, par la même raison que dans la démonstration du théorème précédent, on aura

$$f(\alpha)\varphi(\alpha^{\gamma}).\varphi(\alpha^{\gamma^2})\ldots\varphi(\alpha^{\gamma'-2})$$

divisible par $N\varphi(\alpha)$; d'où

$$\frac{f(\alpha).\varphi(\alpha^{\gamma}).\varphi(\alpha^{\gamma^2})\ldots\varphi(\alpha^{\gamma'-2})}{N\varphi(\alpha)}=\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=Q(\alpha),$$

$Q(\alpha)$ étant un entier.

Pour les applications que nous ferons dans la suite, nous ajoutons encore ce théorème, qui découle immédiatement du théorème principal :

Lorsqu'une puissance d'un nombre complexe est décomposée en plusieurs facteurs premiers entre eux, ces facteurs seront séparément des puissances semblables, multipliées par des unités complexes.

§ VI.

De la composition des nombres complexes idéaux.

Puisque les nombres complexes idéaux, comme facteurs des nombres complexes, jouent le même rôle que les facteurs existants, nous les désignerons désormais de la même manière que ceux-ci, par $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, etc., en sorte que $f(\alpha)$ par exemple, sera un nombre complexe, satisfaisant à un certain nombre déterminé de conditions caractéristiques pour les facteurs premiers idéaux, abstraction faite de l'existence du nombre $f(\alpha)$.

Cela posé, la norme d'un nombre complexe idéal sera toujours un nombre complexe existant; car, en supposant que $f(\alpha)$ contient m facteurs idéaux du nombre q, appartenant à l'exposant f, différents ou non, de même m' facteurs idéaux du nombre q', appartenant à l'exposant f', etc., la norme $Nf(\alpha)$ contenant tous les facteurs idéaux

de q, mf fois chacun, sera divisible par q^{mf}, de même elle sera divisible par $q'^{m'f'}$, etc., et, puisque la norme ne contient pas d'autres facteurs idéaux, elle sera égale à $q^{mf}.q'^{m'f'}\ldots$, à une unité près.

Le problème de trouver un nombre complexe existant $F(\alpha)$, qui eût le facteur idéal $f(\alpha)$, aura toujours une infinité de solutions différentes, c'est-à-dire il y a toujours une infinité de nombres idéaux qui, multipliés par le nombre idéal déterminé $f(\alpha)$, produisent des nombres complexes existants. En choisissant ces multiplicateurs idéaux de manière que la norme du produit soit aussi petite que possible, on parviendra au résultat remarquable, qu'un nombre fini et déterminé de multiplicateurs idéaux suffit à rendre existante l'infinité de tous les nombres idéaux.

Soient, comme ci-dessus, q un nombre premier appartenant à l'exposant f, q' un nombre premier appartenant à l'exposant f', etc., soit $f(\alpha)$ un nombre complexe idéal qui contienne m fois le facteur premier idéal de q, appartenant à la substitution $v = u_r$, de plus m' fois le facteur premier idéal de q', appartenant à la substitution $v' = u'^{r'}$, etc., soit enfin

$$F(\alpha) = x_1\alpha + x_2\alpha^2 + x_3\alpha^3 + \ldots + x_{f-1}\alpha^{f-1}$$

un nombre complexe existant, qui contienne tous les facteurs premiers idéaux de $f(\alpha)$, c'est-à-dire le nombre idéal $f(\alpha)$ lui-même. La condition que $F(\alpha)$ contienne m fois le facteur premier de q, appartenant à la substitution $v = u_r$, est exprimée par une congruence de la forme

$$[\Psi(\alpha, \ldots)]^m F(\alpha) \equiv 0 \pmod{q^m},$$

équivalente à f congruences linéaires par rapport aux coefficients de $F(\alpha)$, pour le même module q^m. Soient donc

$$\Phi \equiv 0, \quad \Phi_1 \equiv 0, \ldots, \quad \Phi_{f-1} \equiv 0 \pmod{q^m},$$

ces f congruences linéaires. Soient de même

$$\Phi' \equiv 0, \quad \Phi'_1 \equiv 0, \ldots, \quad \Phi'_{f'-1} \equiv 0 \pmod{q'^{m'}},$$

ces f' congruences nécessaires et suffisantes, pour que $F(\alpha)$ contienne

m' fois le facteur premier de q', appartenant à la substitution $v' = u'_{\nu'}$, et ainsi de suite. Cela posé, si l'on donne aux $\lambda - 1$ coefficients $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\lambda-1}$, toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k-1$, en sorte qu'on ait $k_{\lambda-1}$ combinaisons diverses de valeurs de ces coefficients, on voit que chacune des f quantités $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{f-1}$ ne pourra donner que q^m restes différents par rapport au module q^m; de même chacune des f' quantités $\Phi', \Phi'_1, \ldots, \Phi'_{f'-1}$, ne donnera que $q'^{m'}$ restes différents, pour le module $q'^{m'}$, etc. Le nombre de toutes les combinaisons différentes des restes des $f + f' + \ldots$ quantités désignées par Φ, sera donc égal à $q^{mf}.q'^{m'f'}\ldots$. Maintenant si l'on prend le nombre k assez grand pour que le nombre des combinaisons de tous les restes possibles soit inférieur au nombre des combinaisons des valeurs des coefficients, c'est-à-dire $q^{mf}.q'^{m'f'}\ldots < k^{\lambda-1}$, on voit que toutes les combinaisons différentes des valeurs des coefficients ne pourront pas appartenir à des combinaisons différentes des restes, mais que ces combinaisons des restes se reproduiront nécessairement. Soit donc

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \ldots, \quad x_{\lambda-1} = a_{\lambda-1},$$

une combinaison de valeurs des coefficients, pour lesquelles toutes les quantités désignées par Φ donnent les mêmes restes que pour la combinaison

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad x_3 = b_3, \ldots, \quad x_{\lambda-1} = b_{\lambda-1};$$

par la soustraction des résultats de ces deux substitutions, les restes égaux se détruisent, et puisque les quantités désignées par Φ sont linéaires par rapport aux coefficients $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\lambda-1}$, on voit que la combinaison des valeurs

$$x_1 = a_1 - b_1, \; x_2 = a_2 - b_2, \; x_3 = a_3 - b_3, \ldots, \; x_{\lambda-1} = a_{\lambda-1} - b_{\lambda-1}$$

satisfera à toutes les congruences nécessaires pour que $F(\alpha)$ contienne le facteur idéal $f(\alpha)$. Ainsi, parmi les nombres complexes dont les coefficients entiers positifs ou négatifs ne surpassent pas la valeur $k-1$, où k satisfait à la condition $k^{\lambda-1} > Nf(\alpha)$, il y en aura toujours qui contiennent le facteur idéal $f(\alpha)$.

En developpant le produit des deux nombres réciproques $F(\alpha)$ et $F(\alpha^{-1})$, puis changeant α en α^2, α^3,..., $\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}$, et ajoutant, on obtient

$$F(\alpha).F(\alpha^{-1}) + F(\alpha^2).F(\alpha^{-2}) + \ldots + F\left(\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}\right).F\left(\alpha^{-\frac{\lambda-1}{2}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{\lambda-1}^2) - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{\lambda-1})^2;$$

et puisque les coefficients x_1, x_2, x_3,..., $x_{\lambda-1}$, abstraction faite des signes, ne sont pas supérieurs à $k-1$, on en déduit facilement l'inégalité

$$F(\alpha).F(\alpha^{-1}) + F(\alpha^2).F(\alpha^{-2}) + \ldots$$
$$+ F\left(\alpha^{\frac{\lambda-1}{2}}\right).F\left(\alpha^{-\frac{\lambda-1}{2}}\right) \leqq \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda-1)(k-1)^2,$$

et en faisant usage de la proposition connue, que le produit de n quantites positives est plus petit que la $n^{\text{ième}}$ puissance de la moyenne arithmétique de ces quantités, on en conclut sans difficulté

$$NF(\alpha) \leqq \lambda^{\frac{\lambda-1}{2}}(k-1)^{\lambda-1}.$$

Le nombre k, qui doit satisfaire à la condition $k^{\lambda-1} > Nf(\alpha)$ pourra toujours être pris de manière à rendre $(k-1)^{\lambda-1} < Nf(\alpha)$; par cette supposition on a

$$NF(\alpha) < \lambda^{\frac{\lambda-1}{2}} Nf(\alpha).$$

En représentant actuellement le nombre complexe $F(\alpha)$ comme produit des deux facteurs idéaux $\varphi(\alpha)$ et $f(\alpha)$, on aura

$$F(\alpha) = \varphi(\alpha).f(\alpha),$$

d'où

$$NF(\alpha) = N\varphi(\alpha).Nf(\alpha),$$

et, au moyen de l'inégalité trouvée, il vient

$$N\varphi(\alpha) < \lambda^{\frac{\lambda-1}{2}}.$$

Ainsi, les multiplicateurs idéaux, qui, composés avec tous les nombres complexes idéaux, donnent des nombres complexes existants, peuvent toujours être choisis tels, que leurs normes soient plus petites que $\lambda^{\frac{1}{2}}$; et puisque le nombre des facteurs idéaux dont les normes ne surpassent pas cette limite fixe est limité, nous avons ce théorème :

Il y a toujours un nombre fini de multiplicateurs idéaux, qui, composés avec les nombres idéaux, en nombre infini, les rendent tous nombres complexes existants.

Les multiplicateurs qui rendent existants les nombres complexes idéaux, avec lesquels ils sont composés, donnent lieu à la classification des nombres complexes idéaux, que nous établissons par cette définition :

Tous les nombres complexes idéaux qui donnent des produits existants lorsqu'on les multiplie par un même nombre idéal, seront appelés NOMBRES IDÉAUX ÉQUIVALENTS, *et ils seront attribués à une même* CLASSE *des nombres complexes idéaux.*

Nous comprenons dans cette classification les nombres existants eux-mêmes, qui constituent une de ces classes que nous appellerons *la classe principale.*

D'abord nous observons qu'un nombre idéal, multiplié par un nombre existant, ne donnera jamais un produit existant, puisqu'alors le quotient de deux nombres existants serait un nombre idéal.

Soient à présent $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ deux nombres idéaux équivalents, $\psi(\alpha)$ le multiplicateur qui les rend existants, soit aussi $\chi(\alpha)$ un multiplicateur de $f(\alpha)$, tel que $\chi(\alpha).f(\alpha)$ soit un nombre existant; je dis que $\chi(\alpha).\varphi(\alpha)$ sera de même un nombre existant. En effet, puisque $\psi(\alpha).f(\alpha)$ est un nombre existant, il en sera de même du produit

$$\psi(\alpha^2).\psi(\alpha^3)\ldots\psi(\alpha^{\rho-1}).f(\alpha^2).f(\alpha^3)\ldots f(\alpha^{\rho-1}).$$

Multipliant donc par les deux nombres existants $\psi(\alpha).\varphi(\alpha)$ et $\chi(\alpha).f(\alpha)$ on aura le nombre existant

$$\chi(\alpha).f(\alpha).N\psi(\alpha).N\varphi(\alpha).$$

et, en supprimant le facteur existant $N\psi(\alpha) . Nf(\alpha)$, on voit que $\varphi(\alpha) . \chi(\alpha)$ est un nombre existant. Nous en concluons :

Les classes des nombres équivalents sont toujours les mêmes, pour tous les multiplicateurs qu'on pourra choisir.

Soit présentement $f(\alpha)$ équivalent à $\psi(\alpha)$, et de même $\varphi(\alpha)$ équivalent à $\psi(\alpha)$, je dis que $f(\alpha)$ sera équivalent à $\varphi(\alpha)$. En effet, tout multiplicateur de $\psi(\alpha)$, qui donne un produit existant, sera de même multiplicateur de $f(\alpha)$ et de $\varphi(\alpha)$. Donc :

Deux nombres idéaux, équivalents à un même troisième nombre idéal, sont équivalents entre eux.

En rapprochant ces résultats du premier théorème de ce paragraphe, on conclut :

Les classes diverses dans lesquelles tous les nombres idéaux se distribuent, sont en nombre fini et complétement déterminées, en sorte qu'un certain nombre idéal n'appartient qu'à une seule classe.

Soient $f(\alpha)$ et $f_1(\alpha)$ deux nombres idéaux équivalents, $\psi(\alpha)$ le multiplicateur qui les rend existants; soient de même $\varphi(\alpha)$ et $\varphi_1(\alpha)$ deux nombres équivalents, et $\chi(\alpha)$ leur multiplicateur; $\psi(\alpha) . \chi(\alpha)$ sera évidemment un multiplicateur qui rend existant le produit $f(\alpha) . \varphi(\alpha)$, de même que le produit $f_1(\alpha) . \varphi_1(\alpha)$. Ces produits seront donc équivalents. De là ce théorème :

Des nombres équivalents, multipliés par des nombres équivalents, donnent toujours des produits équivalents.

Il suit de là que, lorsqu'on multiplie les nombres idéaux d'une certaine classe avec les nombres idéaux d'une autre classe, tous ces produits appartiendront à une même classe déterminée. Ainsi :

La classe du produit de deux nombres idéaux est complétement déterminée par les classes des facteurs.

Lorsqu'on multiplie un nombre idéal donné par un des nombres de chaque classe, on aura autant de produits qu'on a de classes, et l'on s'assure aisément que tous ces produits appartiennent à des classes

différentes. Parmi ces produits, il y en aura nécessairement un, et il n'y en aura qu'un, qui appartient à la classe principale. Donc :

Il correspond à chaque classe une certaine classe, en sorte que ces deux classes composées produisent la classe principale, c'est-à-dire que le produit de deux nombres quelconques de ces deux classes est un nombre complexe existant.

Les classes qui produisent la classe principale, lorsqu'elles sont composées avec elles-mêmes, seront appelées *classes ambiguës*. La classe principale est toujours une classe ambiguë; d'autres classes ambiguës n'existent que pour des valeurs particulières du nombre λ.

Considérons maintenant les diverses puissances entières d'un nombre idéal $f(\alpha)$. Dans la série

$$f(\alpha),\quad f(\alpha)^2,\quad f(\alpha)^3,\quad f(\alpha)^4,\ldots,$$

il y aura nécessairement des nombres idéaux équivalents, car le nombre de ceux qui appartiennent à des classes diverses est fini, aussi bien que le nombre des classes mêmes.

Soient donc $f(\alpha)^r$ et $f(\alpha)^s$ deux nombres idéaux équivalents de cette série où $s > r$; soit aussi $\Psi(\alpha)$ un multiplicateur qui rend $f(\alpha)^r\Psi(\alpha)$ et $f(\alpha)^s\Psi(\alpha)$ nombres existants; le quotient de ces deux nombres, ou bien $f(\alpha)^{s-r}$, sera de même un nombre existant. Nous avons donc ce théorème important :

Tout nombre complexe idéal, élevé à une certaine puissance entière, donne un nombre complexe existant.

Ou bien :

Tout nombre complexe idéal peut être représenté comme une certaine racine d'un nombre complexe existant.

Si l'exposant h est le plus petit pour lequel $f(\alpha)^h$ est un nombre existant, les nombres de la série de h termes

$$1,\ f(\alpha),\quad f(\alpha)^2,\quad f(\alpha)^3,\ldots,\quad f(\alpha)^{h-1}$$

appartiendront à des classes diverses; car, si l'on avait $f(\alpha)^r$ équivalent à $f(\alpha)^s$, r et s étant positifs et moindres que h, on en conclurait, comme ci-dessus, que $f(\alpha)^{s-r}$ serait existant. Il y aurait donc un exposant

$s - r$, moindre que h, pour lequel la puissance du nombre idéal $f(\alpha)$ serait un nombre existant, ce qui est contre l'hypothèse. Il se peut maintenant que les h classes, représentées par les nombres idéaux de la série proposée de h termes, embrassent toutes les classes des nombres idéaux; alors le nombre de toutes les classes diverses sera égal à h. Si cela n'a pas lieu, on choisira arbitrairement un nombre idéal $\varphi(\alpha)$, non équivalent aux h nombres idéaux proposés, et l'on en formera ce second groupe de h nombres idéaux

$$\varphi(\alpha),\ \varphi(\alpha).f(\alpha),\ \varphi(\alpha).f(\alpha)^2, \ldots,\ \varphi(\alpha).f(\alpha)^{h-1}.$$

Les h termes de ce groupe ne sont pas équivalents, ni entre eux, ni aux termes du premier groupe. En effet, si l'on avait $\varphi(\alpha).f(\alpha)^r$ équivalent à $\varphi(\alpha).f(\alpha)^s$, r et s étant moindres que h, il s'ensuivrait $f(\alpha)^r$ équivalent à $f(\alpha)^s$, contre l'hypothèse, et, si l'on avait $\varphi(\alpha).f(\alpha)^r$ équivalent à $f(\alpha)^s$, en multipliant par $f(\alpha)^{h-r}$, on aurait aussi $\varphi(\alpha).f(\alpha)^h$ équivalent à $f(\alpha)^{h-r+s}$, ou bien $\varphi(\alpha)$ équivalent à $f(\alpha)^{s-r}$, ce qui est aussi contre l'hypothèse. Maintenant, il se pourra que les $2h$ classes de nombres idéaux, représentées par le premier et le second groupe, embrassent toutes les classes des nombres idéaux. Dans ce cas, le nombre des classes sera égal à $2h$. Mais si cela n'a pas lieu, on prendra arbitrairement un nombre idéal $\psi(\alpha)$, qui ne soit pas équivalent à aucun nombre de ces deux groupes, et l'on en composera ce troisième groupe de h termes.

$$\psi(\alpha),\ \psi(\alpha).f(\alpha),\ \psi(\alpha).f(\alpha)^2, \ldots,\ \psi(\alpha).f(\alpha)^{h-1}.$$

On démontre aisément que ces nombres idéaux ne sont pas équivalents ni entre eux ni aux termes du premier et du second groupe, et l'on en conclut, si ces trois groupes embrassent toutes les classes, que le nombre des classes sera égal à $3h$. Si cela n'a pas lieu, on pourra continuer de la même manière, et l'on voit clairement qu'on parviendra ainsi à ranger toutes les classes des nombres idéaux en groupes de h termes. De là ce théorème :

Le nombre total de toutes les classes des nombres idéaux est un multiple du plus petit exposant de la puissance d'un nombre idéal quelconque qui devient un nombre complexe existant.

Toutes les autres puissances du nombre idéal $f(\alpha)$, qui donnent des nombres complexes existants, seront nécessairement contenues dans la forme $f(\alpha)^{mh}$, d'où l'on conclut ce corollaire :

Si une puissance d'un nombre complexe idéal donne un nombre complexe existant, il faut que l'exposant de cette puissance ait un facteur commun avec le nombre des classes de tous les nombres complexes idéaux.

Il se présente ici la question délicate, si le nombre idéal $f(\alpha)$ pourra toujours être choisi tel, que les nombres idéaux d'un seul groupe

$$1, \quad f(\alpha), \quad f(\alpha)^2, \quad f(\alpha)^3, \ldots, \quad f(\alpha)^{h-1}$$

embrassent toutes les classes des nombres idéaux. Il nous paraît que cela n'a pas lieu dans tous les cas, mais qu'il y a effectivement des nombres premiers λ pour lesquels les puissances d'un seul nombre idéal ne pourront jamais représenter toutes les classes des nombres complexes idéaux. En laissant cela aux recherches plus approfondies des géomètres, nous remarquons que la question analogue pour la composition des formes quadratiques a été traitée par M. Gauss dans la cinquième section, n° 306, des *Disquisitiones Arithmeticæ*.

Remarque. Qu'il me soit permis de signaler ici en peu de mots l'analogie de cette théorie de la composition des nombres idéaux avec les principes fondamentaux de la chimie. La composition des nombres complexes peut être envisagée comme l'analogue de la combinaison chimique; les facteurs premiers correspondent aux éléments, ou plutôt aux équivalents de ces éléments. Les nombres complexes idéaux sont comparables aux radicaux hypothétiques qui n'existent pas par eux-mêmes, mais seulement dans les combinaisons; le fluor, en particulier, comme élément qu'on ne sait pas représenter isolément, peut être comparé à un facteur premier idéal. La notion de l'équivalence des nombres idéaux est, au fond, la même que celle de l'équivalence chimique; car, ainsi que des quantités pondérales équivalentes des matières naturelles peuvent être substituées les unes aux autres pour rendre des sels neutres ou des corps isomorphes, de même les nombres idéaux, remplacés par les facteurs équivalents, ne produisent que des nombres idéaux de la même classe. En comparant les méthodes de

l'analyse chimique à celles de la décomposition des nombres complexes, on trouve encore des analogies surprenantes. Car, de même que les réactifs chimiques, joints à un corps en dissolution, donnent des précipités au moyen desquels on reconnaît les éléments contenus dans le corps proposé, de même les nombres que nous avons désignés par $\Psi(\eta)$ comme réactifs des nombres complexes, font connaître les facteurs premiers contenus dans les nombres complexes en mettant en évidence un facteur premier q analogue au précipité chimique. Toutes ces analogies qu'on pourra poursuivre et augmenter à volonté, ne proviennent pas d'un jeu d'esprit oisif, mais elles sont bien fondées en ce que les mêmes idées fondamentales de la composition et décomposition des éléments règnent aussi bien dans la chimie des matières naturelles que dans celle des nombres complexes.

§ VII.

Application à la théorie de la division du cercle.

On sait que toutes les difficultés de la théorie de la division du cercle, c'est-à-dire de la solution algébrique de l'équation binôme $x^p = 1$, se réduisent à la recherche de certains nombres complexes du genre de ceux qui ont été discutés dans ce qui précède. Sous le point de vue théorique, on désire la connaissance approfondie de la constitution intérieure de ces nombres complexes, et pour la pratique, il reste encore à réduire le calcul de ces nombres à la solution d'un seul problème élémentaire et général. C'est ce que nous compléterons au moyen de notre théorie des nombres complexes.

Soient p un nombre premier de la forme $m\lambda + 1$, g une racine primitive de la congruence $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, x une racine imaginaire de l'équation $x^p = 1$, et soient, comme ci-dessus, α une racine imaginaire de l'équation $\alpha^\lambda = 1$, λ un nombre premier. Cela posé, la partie la plus difficile du problème de la résolution algébrique de l'équation $x^p = 1$ tient à la recherche de la puissance $\lambda^{ième}$ de l'expression résolvante proposée par Lagrange.

$$x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \alpha^3 x^{g^3} + \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

que nous désignons simplement par (α, x). Cette puissance, indépendante de x, n'est qu'un nombre complexe composé des racines α, α^2, α^3,..., $\alpha^{\lambda-1}$. En faisant usage de l'expression

$$\frac{(\alpha, x)^{\lambda-1} - (\alpha^{\lambda-1}, x)}{\alpha^{\lambda-1} - \alpha} = \psi_{\lambda-1}(\alpha),$$

qui est de même indépendante de x, et en observant que

$$(\alpha, x).(\alpha^{-1}, x) = p,$$

on aura

$$(\alpha, x)^2 = p\psi_1(\alpha), \quad (\alpha^2, x) = \psi_2(\alpha), \quad (\alpha^3, x) = \psi_3(\alpha), \ldots, (\alpha^{\lambda-1}, x) = \psi_{\lambda-1}(\alpha);$$

d'où l'on voit que tout se réduit à trouver les nombres complexes désignés par $\psi_k(\alpha)$, pour

$$k = 1, 2, 3, \ldots, \lambda - 2.$$

Nous déterminerons ces nombres complexes en définissant les facteurs premiers idéaux qu'ils contiennent, ce qui se fera au moyen de quelques résultats trouvés en même temps par M. Cauchy et par M. Jacobi, et publiés dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* de l'année 1840, et dans les *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin,* de l'année 1837. Ces deux grands géomètres ont trouvé qu'en désignant par r une racine primitive de l'équation $r^{p-1} = 1$, et faisant

$$(r, x) = rx^g + r^2x^{g^2} + \ldots + r^{p-2}x^{g^{p-2}} = (r, x)^2 - p,$$

$$\frac{(r^m, x) - (r^{m+n}, x)}{r^m - r^{m+n}} = \psi(r),$$

la substitution de la racine primitive g de la congruence

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

au lieu de la racine r de l'équation $r^{p-1} = 1$, donne

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m)\,\Pi(n)} \pmod{p},$$

$\Pi(n)$ désignant le produit $1.2.3\ldots n$, d'où il suit

$$\psi(g) = 0 \pmod{p}, \quad \text{si} \quad m < p-1, \quad n < p-1, \quad m+n > p-1.$$

Pour en faire l'application au nombre complexe $\psi_h(\alpha)$, nous ferons

$$m = \frac{h(p-1)}{\lambda}, \quad n = \frac{i(p-1)}{\lambda}, \quad r^{\frac{p-1}{\lambda}} = \alpha,$$

ce qui donne

$$\psi(r) = \frac{\psi(\alpha^h, \alpha^i, x)}{\psi(\alpha, x)};$$

de là, en faisant $i \equiv hk \pmod{\lambda}$,

$$\psi(r) = \frac{\psi(\alpha, \alpha^i, x)}{\psi(\alpha^{hk}, x)} = \psi_h(\alpha^h).$$

Substituant enfin la racine primitive g au lieu de r, et faisant, pour abréger,

$$g^{\frac{p-1}{\lambda}} \equiv u \pmod{p},$$

nous aurons

$$\psi_h(u^{\alpha}) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{si} \quad h < \lambda, \quad i < \lambda, \quad h + i > \lambda.$$

En considérant les racines $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{\lambda-2}$ comme périodes monômes, on aura les racines des congruences correspondantes $u, u^{\alpha'}, u^{\alpha''}, \ldots, u^{\alpha^{\lambda-2}}$; donc le résultat trouvé pourra s'énoncer comme il suit :

Si la somme du nombre h, positif et moindre que λ, et du plus petit reste positif de hk (mod. λ), est plus grande que λ, le nombre complexe $\psi_h(\alpha)$ contient le facteur premier idéal de p, qui appartient à la substitution $\alpha = u^{\alpha}$.

Le nombre des valeurs de h, qui satisfont à cette condition, est égal à $\frac{\lambda-1}{2}$; car on voit, sans difficulté, que de deux valeurs de h, dont la somme est égale à λ, l'une satisfait toujours, mais qu'elles ne satisfont jamais toutes deux en même temps. Le théorème trouvé fait donc connaître $\frac{\lambda-1}{2}$ facteurs premiers idéaux contenus dans le nombre complexe $\psi_h(\alpha)$, et l'on s'assure facilement qu'il n'y a pas d'autres facteurs premiers dans $\psi_h(\alpha)$. En effet, par l'équation connue

$$\psi_h(\alpha) \cdot \psi_h(\alpha^{-1}) = p,$$

on voit que $\psi_h(\alpha)$ et $\psi_h(\alpha^{-1})$, pris ensemble, contiennent tous les $\lambda - 1$

facteurs premiers de p, et, puisque $\psi_k(\alpha^{-1})$ contient nécessairement autant de facteurs premiers que $\psi_k(\alpha)$, ce nombre complexe contiendra exactement les $\frac{\lambda-1}{2}$ facteurs premiers définis dans le théorème.

En désignant par $f(\alpha)$ le facteur premier (idéal) de p, appartenant à la substitution $\alpha = u$, et par $\left|\frac{k}{h}\right|$ la racine positive, moindre que λ, de la congruence $hx \equiv k \pmod{\lambda}$, nous aurons

$$\psi_k(\alpha) = E(\alpha) \Pi f(\alpha^{-h}),$$

où le signe du produit Π s'étend sur toutes les valeurs de h, moindres que λ, qui satisfont à la condition $\left|\frac{1}{h}\right| + \left|\frac{k}{h}\right| > \lambda$. L'unité complexe $E(\alpha)$, qu'il faut toujours ajouter au produit de tous les facteurs premiers d'un nombre complexe donné, se réduit, dans ce cas, à l'unité simple $\pm\alpha^r$; car, moyennant la formule

$$\psi_k(\alpha)\psi_k(\alpha^{-1}) = p,$$

on a

$$E(\alpha)E(\alpha^{-1}) = 1,$$

équation qui n'est jamais satisfaite que par les unités simples de la forme $\pm\alpha^r$. L'expression de $\psi_k(\alpha)$ devient donc

$$\psi_k(\alpha) = \pm\alpha^r \Pi f(\alpha^{-h}),$$

pour toutes les valeurs positives de $h < \lambda$, qui satisfont à la condition $\left|\frac{1}{h}\right| + \left|\frac{k}{h}\right| > \lambda$. Pour déterminer complétement le signe et l'exposant r de l'unité simple $\pm\alpha^r$, on fera usage de la propriété connue de ces nombres complexes que

$$\psi_k(\alpha) \equiv -1 \quad \{\text{mod. } (1-\alpha)^2\}$$

Des facteurs premiers trouvés de $\psi_k(\alpha)$, on déduit ceux de la puissance

$$(\alpha, x)^\lambda = p\,\psi_1(\alpha) \cdot \psi_2(\alpha) \cdot \psi_3(\alpha) \ldots \psi_{\lambda-2}(\alpha).$$

Le facteur premier idéal déterminé $f(\alpha^{-h})$ se trouvera dans le produit

$\psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha), \psi_3(\alpha) \ldots \psi_{\lambda-2}(\alpha)$ autant de fois précisément qu'il y a de nombres k, pour lesquels on a

$$\left[\frac{1}{h}\right] + \left[\frac{k}{h}\right] > \lambda,$$

et, puisque $\left[\frac{k}{h}\right]$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots, \lambda - 2$, a évidemment toutes les valeurs $\left[\frac{k}{h}\right] = 1, 2, 3, \ldots, \lambda - 1$, excepté la seule $\left[\frac{\lambda-1}{h}\right] = \lambda - \left[\frac{1}{h}\right]$, le nombre des valeurs de k, qui donnent

$$\left[\frac{1}{h}\right] + \left[\frac{k}{h}\right] > \lambda, \quad \text{ou} \quad \left[\frac{k}{h}\right] > \lambda - \left[\frac{1}{h}\right],$$

c'est-à-dire le nombre des facteurs $f(\alpha^{-h})$ contenus dans le produit $\psi_1(\alpha) \cdot \psi_2(\alpha) \ldots \psi_{\lambda-2}(\alpha)$, sera égal à $\left[\frac{1}{h}\right] - 1$. En y ajoutant un facteur $f(\alpha^{-h})$, contenu dans p, on voit que le facteur premier $f(\alpha^{-h})$ est contenu $\left[\frac{1}{h}\right]$ fois précisément dans la puissance $(\alpha, x)^{\lambda}$. Ainsi, en prenant

$$h = 1, 2, 3, \ldots, \lambda - 1,$$

on a l'expression

$$(\alpha, x)^{\lambda} = \pm \alpha^{s} f(\alpha^{-1})^{\left[\frac{1}{1}\right]} \cdot f(\alpha^{-2})^{\left[\frac{1}{2}\right]} f(\alpha^{-3})^{\left[\frac{1}{3}\right]} \ldots f(\alpha^{-\lambda+1})^{\left[\frac{1}{\lambda-1}\right]},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\alpha, x)^{\lambda} = \alpha^{s} f(\alpha)^{\left[\frac{1}{\lambda-1}\right]} f(\alpha^{2})^{\left[\frac{1}{\lambda-2}\right]} \cdot f(\alpha^{3})^{\left[\frac{1}{\lambda-3}\right]} \ldots f(\alpha^{\lambda-1})^{\left[\frac{1}{1}\right]}.$$

Ici l'unité simple $\pm \alpha^{s}$ sera, en chaque cas, déterminée complétement par la condition connue

$$(\alpha, x)^{\lambda} = -1 \pmod{\lambda}$$

La décomposition en facteurs premiers donne en même temps la connaissance parfaite des nombres complexes qui se présentent dans la théorie de la division du cercle, et le moyen le plus simple pour les calculer; car on voit que tout se réduit au seul problème de trouver

un facteur premier complexe du nombre p, qui pourra être représenté comme nombre complexe entier, s'il existe par soi-même, ou comme racine d'un certain degré d'un nombre complexe existant, s'il est idéal. La recherche de ces facteurs premiers se fait assez facilement au moyen de méthodes indirectes qui s'offrent d'elles-mêmes. Il ne serait pas trop pénible, et il serait très-utile, pour cette théorie, de construire une Table de tous les facteurs premiers existants et idéaux des nombres premiers du premier millier, laquelle donnerait tous les nombres nécessaires pour la résolution algébrique de l'équation $x^p = 1$, pour tous les nombres premiers p contenus dans les mêmes limites. Une partie de cette Table a été donnée dans la dissertation *de numeris complexis*, etc., publiée en 1834, et réimprimée dans ce Journal en 1837.

Pour faire mieux apprécier l'usage des formules données dans ce paragraphe, nous rappelons la méthode ingénieuse dont M. Gauss s'est servi pour trouver l'équation du troisième degré, dont les racines sont les trois périodes à $\frac{p-1}{3}$ termes (voir *Disq. Arithm.*, sect. VII, n° 358), qui revient à ce que le nombre $4p$ doit être mis sous la forme du second degré

$$4p = M^2 + 27N^2.$$

Notre méthode donne la même réduction pour le problème général, où il s'agit de λ périodes à $\frac{p-1}{\lambda}$ termes; car le problème de trouver un facteur premier complexe d'un nombre premier p est essentiellement le même que de représenter le nombre p comme une certaine forme du degré $\lambda - 1$ et du même nombre d'indéterminés; on voit aussi que les coefficients du nombre premier complexe, ou, ce qui revient au même, les valeurs des indéterminés de la forme du degré $\lambda - 1$, jouent le même rôle dans le problème général, que les deux nombres M et N de la forme

$$4p = M^2 + 27N^2,$$

pour le cas de $\lambda = 3$.

§ VIII.

Recherche du nombre des classes diverses des nombres complexes idéaux.

Les principes nouveaux dont M. Lejeune-Dirichlet s'est servi dans la recherche du nombre des formes quadratiques qui répondent à un déterminant donné, joints aux résultats exposés dans ce qui précède, suffiront pour achever la recherche analogue du nombre des classes des nombres complexes idéaux. Pour en faire l'application, nous considérons la série infinie

$$R = \sum \frac{1}{[NF(\alpha)]^{s-1}},$$

où le signe sommatoire $\sum$ doit être pris par rapport à tous les nombres complexes différents, existants ou idéaux, et où l'on compte pour différents deux nombres complexes qui ne sont pas composés des mêmes facteurs premiers idéaux. Pour que la série proposée soit convergente, le nombre s est supposé positif et plus grand que l'unité, mais on le fera décroître ci-après jusqu'à la limite 1.

La norme d'un nombre complexe, existant ou idéal, étant toujours de la forme

$$NF(\alpha) = \lambda^n . q^{mf} . q'^{m'f'} . q''^{m''f''} \ldots$$

où $q, q', q'', \ldots$, sont des nombres premiers qui appartiennent respectivement aux exposants $f, f', f'', \ldots$, nous pourrons introduire cette expression dans la série R; mais puisque la même norme convient toujours à plusieurs nombres complexes différents, nous rechercherons d'abord combien de nombres complexes donneront la même norme, c'est-à-dire combien de fois le terme

$$\frac{1}{\lambda^{s-1} . q^{mf(s-1)} . q'^{m'f'(s-1)} . q''^{m''f''(s-1)} \ldots}$$

se trouvera dans la série R. On conclut du facteur q^{mf} contenu dans la norme, que le nombre complexe $F(\alpha)$ contiendra nécessairement m facteurs premiers de q, différents ou non, et parce qu'il y a $\frac{\lambda-1}{f} = e$

facteurs premiers de q, on voit qu'en prenant toutes les combinaisons m à m des e facteurs premiers idéaux, sans exclure les facteurs premiers égaux, on aura toutes les manières de produire le facteur q^{mf} de la norme. Cela se fera, comme on sait, de

$$\frac{e(e+1)(e+2)\ldots(e+m-1)}{1.2.3\ldots m}$$

manières différentes. De même le facteur de la norme $q'^{m'f'}$ pourra être produit de

$$\frac{e'(e'+1)(e'+2)\ldots(e'+m'-1)}{1.2.3\ldots m'}$$

manières différentes, si

$$e' = \frac{\lambda - 1}{f'}.$$

et ainsi de suite. Observons encore que le facteur λ^n ne sera produit que d'une seule manière, savoir par le facteur $(1-\alpha)^n$, qui doit être contenu dans $F(\alpha)$. En combinant ces résultats particuliers, on voit que le terme

$$\frac{s-1}{[NF(\alpha)]} = \frac{s-1}{(\lambda^n.q^{mf}.q'^{m'f'}.q''^{m''f''}\ldots)}.$$

pour des valeurs déterminées des nombres premiers q, q', q'',... et des nombres n, m, m', m'',..., sera contenu

$$\frac{e(e+1)\ldots(e+m-1)}{1.2\ldots m}\cdot\frac{e'(e'+1)\ldots(e'+m'-1)}{1.2\ldots m'}\cdot\frac{e''(e''+1)\ldots(e''+m''-1)}{1.2\ldots m''}\ldots$$

fois précisément dans la série R. Donc cette série pourra être représentée de cette manière,

$$R = (s-1)\sum\frac{\frac{e(e+1)\ldots(e+m-1)}{1.2\ldots m}\cdot\frac{e'(e'+1)\ldots(e'+m'-1)}{1.2\ldots m'}}{\lambda^{ns}.q^{mfs}.q'^{m'f's}\ldots}$$

où le signe sommatoire est pris par rapport à toutes les valeurs entières positives, zéro y compris, des nombres n, m, m', m''.... Toutes ces sommations s'effectuent sans difficulté au moyen des séries binò-

miales

$$1 + \frac{1}{q^f} + \frac{1}{q^{2f}} + \frac{1}{q^{3f}} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^f}},$$

$$1 + \frac{e}{1}\frac{1}{q^f} + \frac{e}{1}\frac{e+1}{1.2}\cdot\frac{1}{q^{2f}} + \ldots = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^f}}\right)^e;$$

$$1 + \frac{e'}{1}\frac{1}{q^{f'}} + \frac{e'}{1}\frac{e'+1}{1.2}\cdot\frac{1}{q^{2f'}} + \ldots = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{f'}}}\right)^{e'}.$$

. . . . . .

On aura donc la série R exprimée comme produit d'un nombre infini de facteurs

$$R = \frac{\lambda - 1}{1 - \frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^f}}\right)^e \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{f'}}}\right)^{e'} \cdots$$

En séparant les nombres premiers q, suivant les exposants auxquels ils appartiennent, on aura autant de produits infinis qu'il y a de diviseurs différents de $\lambda - 1$. Le produit total donnera

$$R = \frac{\lambda - 1}{1 - \frac{1}{\lambda}}\,\Pi\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^f}}\right)^e \cdot \Pi\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{f'}}}\right)^{e'} \cdots$$

où le premier signe du produit Π se rapporte à tous les nombres premiers q, qui appartiennent à l'exposant f, le second à ceux qui appartiennent à l'exposant f', et ainsi de suite.

Soient à présent β une racine primitive de l'équation $\beta^{\lambda-1} = 1$, r un nombre entier, tel que le plus grand diviseur commun de r et $\lambda - 1$ est égal à e; on aura évidemment

$$1 - \frac{1}{q^r} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\cdot\left(1 - \frac{\beta}{q}\right)\cdot\left(1 - \frac{\beta^2}{q}\right)\cdots\left(1 - \frac{\beta^{r-1}}{q}\right).$$

En élevant à la puissance $-e$, et observant qu'on a généralement

$$\beta^r = \beta^{\lambda+r} = \beta^{2\lambda+r} \ldots\ldots$$

on conclut de là que

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{f}}}\right)^{e}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{s}}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{r}}{q^{s}}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{2r}}{q^{s}}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{(\lambda-2)r}}{q^{s}}}\right).$$

Le nombre r, dont le plus grand diviseur commun avec $\lambda-1$ doit être égal à e, pourra toujours être pris égal à l'indice de q; car, en posant

$$r\equiv \operatorname{ind} q \quad [\text{mod. } (\lambda-1)],$$

on a

$$q\equiv\gamma^{r} \quad (\text{mod. } \lambda),$$

et puisque q appartient à l'exposant f, on aura

$$q^{f}\equiv\gamma^{rf}\equiv 1,$$

d'où l'on conclut que $r=\operatorname{ind} q$ sera un multiple de e; mais s'il y avait un facteur plus grand de $r=\operatorname{ind} q$ et $\lambda-1$, f ne serait pas le plus petit exposant pour lequel on a $q^{f}\equiv 1$ (mod. λ). La substitution de la valeur convenable $r=\operatorname{ind} q$ donne

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{f}}}\right)^{e}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{s}}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{\operatorname{ind} q}}{q^{s}}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{2\operatorname{ind} q}}{q^{s}}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{(\lambda-2)\operatorname{ind} q}}{q^{s}}}\right).$$

Les nombres f et e n'étant plus contenus dans cette expression, on voit que le même résultat subsiste non-seulement pour les nombres premiers q, qui appartiennent à l'exposant f, mais aussi pour tous les autres q', q'', etc., qui appartiennent aux exposants f', f'', etc. Donc, si l'on fait subir les mêmes transformations à tous les autres facteurs du produit trouvé, on aura cette nouvelle expression de R,

$$\mathrm{R}=\frac{s-1}{1-\frac{1}{\lambda^{s}}}\,\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{s}}}\right)\cdot\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{\operatorname{ind} q}}{q^{s}}}\right)\cdot\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{2\operatorname{ind} q}}{q^{s}}}\right)\cdots\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^{(\lambda-2)\operatorname{ind} q}}{q^{s}}}\right),$$

où tous les $\lambda-1$ signes des produits s'étendent sur tous les nombres premiers, excepté le seul λ.

Les produits infinis de cette formule sont connus par le célèbre Mémoire de M. Lejeune-Dirichlet sur la Progression arithmétique, lu à

l'Académie de Berlin le 27 juillet 1837. Nous ne nous arrêterons pas à développer ici leur transformation en séries infinies très-simples, et la sommation de ces séries, pour le cas de $s = 1$, qu'on trouve dans le premier et dans le quatrième paragraphe du Mémoire cité. En se servant d'une méthode élégante due à Euler, M. Dirichlet a trouvé

$$\Pi = \frac{1}{1 - \frac{\beta^{k \operatorname{ind} l}}{q^s}} = \sum \frac{\beta^{k \operatorname{ind} n}}{n^s},$$

où le signe sommatoire s'étend à tous les nombres entiers positifs n, non divisibles par λ. La substitution des séries au lieu des produits donne

$$R = \frac{\lambda - 1}{1 - \frac{1}{\lambda^s}} \sum \frac{1}{n^s} \cdot \sum \frac{\beta^{\operatorname{ind} n}}{n^s} \cdot \sum \frac{\beta^{2 \operatorname{ind} n}}{n^s} \cdots \sum \frac{\beta^{(\lambda-2) \operatorname{ind} n}}{n^s}.$$

Maintenant, si l'on fait converger indéfiniment s vers la limite $s = 1$, on aura, d'après un théorème de M. Dirichlet,

$$(s - 1) \sum \frac{1}{n^s} = 1 - \frac{1}{\lambda} \quad \text{pour} \quad s = 1,$$

et puisque les autres séries contenues dans l'expression de R ne cessent pas d'être convergentes pour $s = 1$, on a

$$R = \sum \frac{\beta^{\operatorname{ind} n}}{n} \cdot \sum \frac{\beta^{2 \operatorname{ind} n}}{n} \cdots \sum \frac{\beta^{(\lambda-2) \operatorname{ind} n}}{n} \quad \text{pour} \quad s = 1.$$

Les sommes finies de ces séries, trouvées par M. Dirichlet au § IV du Mémoire cité, peuvent être représentées de la manière suivante :

1°. Si k est impair,

$$\sum \frac{\beta^{k \operatorname{ind} n}}{n} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{\beta^k(\alpha - 1)} \left| 1 + \gamma_1 \beta^k + \gamma_2 \beta^{2k} + \gamma_3 \beta^{3k} \cdots + \gamma_{\lambda-2} \beta^{(\lambda-2)k} \right|,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{\lambda-2}$ désignent les plus petits restes positifs des puissances correspondantes de la racine primitive $\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots, \gamma^{\lambda-2}$, pour le module λ, et (β^k, α) l'expression connue de la division du cercle

$$\beta^k \alpha^{\gamma} + \beta^{2k} \alpha^{\gamma^2} + \beta^{3k} \alpha^{\gamma^3} \cdots + \beta^{(\lambda-1)k} \alpha^{\gamma^{\lambda-2}};$$

2°. Si k est pair,

$$\sum \frac{\beta^{k \operatorname{ind} n}}{n} = \frac{2\left[le(\alpha) + \beta^{k} le(\alpha^{\gamma}) + \beta^{2k} le(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots + \beta^{(\nu-1)k} le(\alpha^{\gamma^{\nu-1}})\right]}{(1-\beta^{-k})(1-\beta^{k}, \alpha)},$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$\mu = \frac{\nu-1}{2},$$

et où $e(\alpha)$ désigne l'unité complexe

$$e(\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\alpha^{\gamma})(1-\alpha^{\gamma^{\nu-1}})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{\gamma^{\nu}})}} = \pm \frac{\alpha^{\frac{\gamma^{\nu}-1}{2}}(1-\alpha^{\gamma})}{1-\alpha},$$

la même qui nous a donné un système indépendant d'unités dans le deuxième paragraphe de ce Mémoire.

Substituons ces sommes dans l'expression trouvée de R, en faisant, pour abréger,

$$1 + \gamma_1\beta + \gamma_2\beta^2 + \gamma_3\beta^3 + \ldots + \gamma_{\nu-2}\beta^{\nu-2} = \varphi(\beta),$$

$$\varphi(\beta).\varphi(\beta^3).\varphi(\beta^5)\ldots\varphi(\beta^{\nu-2}) = \mathrm{P},$$

et comme ci-dessus, dans le § II,

$$le(\alpha) + \beta^2 le(\alpha^{\gamma}) + \beta^4 le(\alpha^{\gamma^2}) + \ldots + \beta^{2\mu-2} le(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}) = \mathrm{L}(\beta^2),$$

nous aurons

$$\mathrm{R} = \frac{2^{\mu-1}\pi^{\mu}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{P}\,\mathrm{L}(\beta^2).\mathrm{L}(\beta^4).\mathrm{L}(\beta^6)\ldots\mathrm{L}(\beta^{2\mu-2})}{\lambda^{\mu}(\beta, \alpha).(\beta^2, \alpha)\ldots(\beta^{\nu-2}, \alpha).(1-\beta^{\nu})(1-\beta^{\nu+1})\ldots(1-\beta^{-2\mu-2})}.$$

Or nous avons trouvé, dans le § II, qu'en désignant par D le déterminant des quantités

$$\begin{array}{l} le(\alpha),\quad le(\alpha^{\gamma}),\ldots,\quad le(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}), \\ le(\alpha^{\gamma}),\quad le(\alpha^{\gamma^2}),\ldots,\quad le(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ le(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}),\quad le(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}),\ldots,\quad le(\alpha^{\gamma^{2\mu-4}}), \end{array}$$

on a

$$L(\beta^2).L(\beta^4).L(\beta^6)\ldots L(\beta^{2-\mu-2}) = \mu D;$$

de plus, les équations

$$(\beta^k, \alpha).(\beta^{-k}, \alpha) = \pm \lambda \quad \text{et} \quad (\beta^\mu, \alpha) = (-1, \alpha) = \pm \sqrt{(-1)^\mu},$$

donnent

$$(\beta, \alpha).(\beta^2, \alpha)\ldots(\beta^{\lambda-2}, \alpha) = \pm \lambda^{\mu+\frac{1}{2}} \sqrt{(-1)^\mu},$$

et l'on a

$$1 - \beta^{-2}).(1 - \beta^{-4})\ldots(1 - \beta^{2-\mu-2}) = \mu:$$

donc on aura enfin l'expression simplifiée

$$R = \frac{2^{\mu-1}\pi^\mu PD}{\lambda^{2\sigma-\frac{1}{2}}} \quad \text{pour} \quad s = 1.$$

Après avoir trouvé cette somme de la série R, pour le cas limite $s = 1$, nous venons à la seconde partie de notre recherche, dont le but sera de trouver une nouvelle expression de la même série R, afin que la comparaison de ces deux résultats nous donne le nombre cherché des classes des nombres idéaux.

Dans la série proposée

$$R = \sum \frac{1}{[NF(\alpha)]^{s-1}},$$

où $F(\alpha)$ représente tous les nombres complexes différents, existants et idéaux, nous séparons les termes suivant les classes diverses auxquelles appartiennent les nombres complexes $F(\alpha)$. En désignant par $f(\alpha)$ tous les nombres de la première classe, c'est-à-dire les nombres complexes existants, par $f_1(\alpha)$ les nombres idéaux de la deuxième classe, par $f_2(\alpha)$ ceux de la troisième classe, et ainsi de suite; et en nommant H le nombre de toutes les classes diverses, nous avons

$$R = \sum \frac{1}{[Nf(\alpha)]^{s-1}} + \sum \frac{1}{[Nf_1(\alpha)]^{s-1}} + \ldots + \sum \frac{1}{[Nf_{H-1}(\alpha)]^{s-1}}:$$

il s'agira donc de trouver les sommes de ces H séries particulières, pour le cas limite $s = 1$. Nous démontrerons ci-après que toutes ces sommes, prises par rapport aux diverses classes des nombres idéaux,

sont égales entre elles; c'est pour cette raison que nous nous bornerons ici à trouver seulement la première somme, qui ne contient que les nombres complexes existants.

Tous les nombres complexes existants sont contenus dans la forme

$$f(\alpha) = x\alpha + x_1\alpha^{\gamma} + x_2\alpha^{\gamma^2} + \ldots + x_{\mu-2}\alpha^{\gamma^{\mu-2}},$$

dans laquelle les coefficients

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_{\mu-2}$$

représentent tous les nombres entiers; mais pour toutes ces valeurs différentes des coefficients, on n'obtiendra pas des nombres complexes différents, car on sait qu'au moyen des unités complexes, le même nombre complexe peut être représenté, par la forme proposée, d'une infinité de manières différentes. Il s'agira donc d'abord de trouver les conditions auxquelles les coefficients

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_{\mu-2}$$

doivent être assujettis, pour que $f(\alpha)$ ne soit qu'une seule fois contenu dans cette forme. A cet effet, j'observe que $f'(\alpha)$ étant une expression déterminée du nombre complexe dont il s'agit, on aura toutes les autres expressions du même nombre, en multipliant celui-ci par une unité quelconque; et puisque toutes les unités sont contenues dans la forme

$$\varepsilon(\alpha) = \pm\alpha^n\varepsilon_1(\alpha)^{m_1}\varepsilon_2(\alpha)^{m_2}\ldots\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}},$$

où $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$,..., $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ sont $\mu - 1$ unités fondamentales, la forme

$$f(\alpha) = \pm\alpha^n\varepsilon_1(\alpha)^{m_1}.\varepsilon_2(\alpha)^{m_2}\ldots\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}}f'(\alpha),$$

pour toutes les valeurs entières des exposants $n, m_1, m_2, \ldots, m_{\mu-1}$, contiendra toutes les expressions possibles du même nombre complexe. Lorsqu'on y change α en α^{-1}, on obtient, en multipliant,

$$f(\alpha).f(\alpha^{-1}) = \varepsilon_1(\alpha)^{2m_1}.\varepsilon_2(\alpha)^{2m_2}\ldots\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{2m_{\mu-1}}f'(\alpha).f'(\alpha^{-1}).$$

En passant aux logarithmes, et changeant α en α^{γ}, α^{γ^2},..., $\alpha^{\gamma^{\mu-2}}$,

on a ce système d'équations,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha).f'(\alpha^{-1})\right] &= m_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha) + m_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha) \\
&\quad + m_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha).f'(\alpha^{-1})\right], \\
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma}).f'(\alpha^{-\gamma})\right] &= m_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma}) + m_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma}) + \ldots \\
&\quad + m_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma}).f'(\alpha^{-\gamma})\right], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}).f'(\alpha^{-\gamma^{\mu-2}})\right] &= m_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + m_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + \ldots \\
&\quad + m_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}).f'(\alpha^{-\gamma^{\mu-2}})\right].
\end{aligned}$$

où le nombre r est tout à fait arbitraire.

Mettons à présent

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha).f'(\alpha^{-1})\right] &= y_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha) + y_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + y_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha), \\
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma}).f'(\alpha^{-\gamma})\right] &= y_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma}) + y_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma}) + \ldots + y_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}).f'(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})\right] &= y_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + y_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + \ldots \\
&\quad + y_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-2}});
\end{aligned}$$

les inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}$ de ce système d'équations linéaires auront toujours des valeurs finies et déterminées, parce que le déterminant du système, ou bien le déterminant Δ du § II de ce Mémoire, n'est pas égal à zéro. Ce système d'équations, ajouté au précédent, donne aussi

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha).f'(\alpha^{-1})\right] &= (m_1 + y_1)\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha) + (m_2 + y_2)\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha) \\
&\quad + (m_{\mu-1} + y_{\mu-1})\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha), \\
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma}).f'(\alpha^{-\gamma})\right] &= (m_1 + y_1)\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma}) + (m_2 + y_2)\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma}) \\
&\quad + (m_{\mu-1} + y_{\mu-1})\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma}). \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left[rf'(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}).f'(\alpha^{-\gamma^{\mu-2}})\right] &= (m_1 + y_1)\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) \\
&\quad + (m_2 + y_2)\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + \ldots + (m_{\mu-1} + y_{\mu-1})\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}).
\end{aligned}$$

On voit par là que les expressions de

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\,[rf'(\alpha)\,f'(\alpha^{-1})] \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\,[rf(\alpha)\,f(\alpha^{-1})],$$

et celles qu'on en déduit par le changement de α en $\alpha^{\gamma}, \alpha^{\gamma^2}, \ldots, \alpha^{\gamma^{\mu-1}}$, ne diffèrent qu'en ce que les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}$ sont augmentées des nombres entiers positifs ou négatifs $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu-1}$. On pourra donc toujours choisir convenablement les nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu-1}$, de manière que les quantités $m_1 + y_1, m_2 + y_2, \ldots, m_{\mu-1} + y_{\mu-1}$ soient toutes contenues entre les limites 0 et 1, et par cette condition, les nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu-1}$ seront parfaitement déterminés. Mettant donc, pour abréger,

$$m_1 + y_1 = z_1, \quad m_2 + y_2 = z_2, \ldots, m_{\mu-1} + y_{\mu-1} = z_{\mu-1},$$

nous concluons que parmi tous les nombres complexes contenus dans la forme

$$f(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha)^{m_1} \cdot \varepsilon_2(\alpha)^{m_2} \ldots \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{m_{\mu-1}} f'(\alpha),$$

il y aura toujours un, et il n'y aura jamais qu'un seul qui satisfait aux conditions

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\,[rf(\alpha)\,f(\alpha^{-1})] = z_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha) + z_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + z_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha),$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\,[rf(\alpha^{\gamma})\,f(\alpha^{-\gamma})] = z_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma}) + z_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma}) + \ldots + z_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\,[rf(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})\,f(\alpha^{-\gamma^{\mu-2}})] = z_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + z_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) \ldots$$
$$+ z_{\mu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}),$$

$z_1, z_2, \ldots, z^{\mu-1}$ désignant des quantités contenues entre les limites 0 et 1. A cause du facteur $\pm\alpha^n$, qu'il faut encore ajouter pour avoir toutes les expressions de $f(\alpha)$, facteur qui donne lieu à 2λ valeurs différentes, il y aura toujours 2λ représentations du nombre $f(\alpha)$, pour lesquelles les conditions posées seront satisfaites. Il serait facile d'ajouter une nouvelle condition des coefficients, en vertu de laquelle le nombre $f(\alpha)$ n'aurait qu'une seule représentation; mais il suffira de savoir que le nombre des représentations de $f(\alpha)$ est exactement égal à 2λ.

D'après les principes établis par M. Lejeune-Dirichlet dans ses recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, on obtient la valeur de la somme

$$\sum \frac{s-1}{[\mathrm{N}f(\alpha)]^s}, \quad \text{pour} \quad s=1,$$

égale au quotient du nombre des termes de cette série, pour lesquels $\mathrm{N}f(\alpha)$ est inférieur à T, divisé par T, lorsqu'on y fait croître la quantité T à l'infini. Nous obtiendrons le nombre des termes pour lesquels on a $\mathrm{N}f(\alpha) < \mathrm{T}$, en recherchant combien il y a de systèmes de valeurs des coefficients $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-2}$, compatibles aux $\mu - 1$ conditions posées jointes à la condition $\mathrm{N}f(\alpha) < \mathrm{T}$, et puis divisant ce nombre par 2λ. Pour cela, nous changeons les quantités $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-2}$ en $\frac{x}{t}, \frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_{\lambda-2}}{t}$: d'où $f(\alpha)$ se change en $\frac{f(\alpha)}{t}$, $\mathrm{N}f(\alpha)$ en $\frac{\mathrm{N}f(\alpha)}{t^{\lambda-1}}$: alors les nouvelles quantités $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-1}$ n'obtiendront plus toutes les valeurs entières compatibles aux conditions posées, mais les valeurs d'une série arithmétique doublement infinie, dont la différence est égale à t. Les $\mu - 1$ conditions pour les nouvelles quantités $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-2}$ ne sont altérées qu'en ce que, au lieu de r on aura $\frac{r}{t^2}$, et puisque r est tout à fait arbitraire, on prendra $r = t^2$, ce qui revient à faire $r = 1$ dans les conditions données ci-dessus. De plus, en prenant $\mathrm{T} = \frac{1}{t^{\lambda-1}}$, au lieu de $\mathrm{N}f(\alpha) < \mathrm{T}$, on a pour les nouveaux coefficients du nombre $f(\alpha)$ la condition $\mathrm{N}f(\alpha) < 1$. Maintenant, si l'on prend t infiniment petit, les quantités $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-2}$ seront des variables continues, le nombre des valeurs de x pourra être représenté sous la forme $\frac{1}{t}\int dx$, le nombre des valeurs de x_1 sous la forme $\frac{1}{t}\int dx_1$, etc.; donc le nombre de toutes les combinaisons des valeurs de $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-1}$ sera donné par l'intégrale multiple

$$\frac{1}{t^{\lambda-1}}\int^{(\lambda-1)} dx.dx_1.dx_2\ldots dx_{\lambda-2},$$

ce qui donne, en divisant par $T = \frac{1}{\mu^{\nu-1}}$,

$$\int^{(\nu-1)} dx.dx_1.dx_2...dx_{\nu-2}.$$

Nous en concluons que la valeur de la somme proposée, pour le cas de $s = 1$, est donnée par la formule

$$\sum \frac{1}{[Nf(\alpha)]^{\nu-1}} = \frac{1}{2\lambda} \int^{(\nu-1)} dx.dx_1.dx_2...dx_{\nu-2}.$$

où les intégrations s'étendent sur toutes les valeurs des variables x, $x_1, \ldots, x_{\nu-2}$ entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, qui satisfont à la condition $Nf(\alpha) > 1$ et aux équations

$$\tfrac{1}{2}\,l\left[rf(\alpha).f(\alpha^{-1})\right] = z_1 l\varepsilon_1(\alpha) + z_2 l\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + z_{\nu-1} l\varepsilon_{\nu-1}(\alpha),$$

$$\tfrac{1}{2}\,l\left[rf(\alpha^{\gamma}).f(\alpha^{-\gamma})\right] = z_1 l\varepsilon_1(\alpha^{\gamma}) + z_2 l\varepsilon_2(\alpha^{\gamma}) + \ldots + z_{\nu-1} l\varepsilon_{\nu-1}(\alpha^{\gamma}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\,l\left[rf(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}).f(\alpha^{-\gamma^{\mu-2}})\right] = z_1 l\varepsilon_1(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + z_2 l\varepsilon_2(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}) + \ldots$$
$$+ z_{\nu-1} l\varepsilon_{\nu-1}(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}),$$

où les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_{\mu-1}$ sont contenues entre les limites 0 et 1.

Pour déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int^{(\nu-1)} dx.dx_1.dx_2...dx_{\nu-2} = I,$$

nous y appliquerons quelques transformations successives, qui seront effectuées d'après les règles connues pour la transformation des intégrales multiples.

D'abord nous introduirons les nouvelles variables y, y_1, $y_2, \ldots$, $y_{\nu-2}$, liées aux variables x, x_1, $x_2, \ldots$, $x_{\nu-2}$ par les équations

$$y = f(\alpha), \quad y_1 = f(\alpha^{\gamma}), \quad y_2 = f(\alpha^{\gamma^2}), \ldots, \quad y_{\nu-2} = f(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}).$$

Les différentielles partielles des nouvelles variables, prises par rapport aux variables $x, x_1, \ldots, x^{\lambda-2}$, sont données par la formule

$$\frac{dy_k}{dx_h} = \alpha^{\gamma^{k+h}},$$

d'où il suit que le déterminant

$$\Sigma\left(\pm \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy_1}{dx_1} \cdots \frac{dy_{\lambda-2}}{dx_{\lambda-2}}\right)$$

sera le déterminant des quantités

$$\begin{array}{llll}
\alpha, & \alpha^{\gamma}, & \alpha^{\gamma^2}, \ldots, & \alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, \\
\alpha^{\gamma}, & \alpha^{\gamma^2}, & \alpha^{\gamma^3}, \ldots, & \alpha, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha^{\gamma^{\lambda-2}}, & \alpha, & \alpha^{\gamma}, \ldots, & \alpha^{\gamma^{\lambda-3}}.
\end{array}$$

qu'on sait être égal au produit des différences de toutes ces quantités prises deux à deux,

$$\begin{array}{l}
(\alpha - \alpha^{\gamma})(\alpha - \alpha^{\gamma^2}) \ldots (\alpha - \alpha^{\gamma^{\lambda-2}}), \\
\qquad (\alpha^{\gamma} - \alpha^{\gamma^2}) \ldots (\alpha^{\gamma} - \alpha^{\gamma^{\lambda-2}}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad (\alpha^{\gamma^{\lambda-3}} - \alpha^{\gamma^{\lambda-2}}).
\end{array}$$

Ce produit, qui contient $\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}$ facteurs premiers de λ, est égal à la puissance $\lambda^{\frac{\lambda-2}{2}}$, d'où résulte

$$\Sigma\left(\pm \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy_1}{dx_1} \cdots \frac{dy_{\lambda-2}}{dx_{\lambda-2}}\right) = \lambda^{\frac{\lambda-2}{2}};$$

et puisqu'on obtient l'intégrale multiple transformée en divisant par ce déterminant, on aura la première transformée

$$\int^{\lambda(\lambda-1)} dy\, dy_1 \ldots dy_{\lambda-2}$$

Transformons de nouveau par les substitutions

$$\mathrm{l}\,y = v + \omega\sqrt{-1},\quad \mathrm{l}\,y_1 = v_1 + \omega_1\sqrt{-1},\ldots,\quad \mathrm{l}\,y_{\nu-1} = v_{\nu-1} + \omega_{\nu-1}\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{l}\,y_{\nu} = v - \omega\sqrt{-1},\quad \mathrm{l}\,y_{\nu+1} = v_1 - \omega_1\sqrt{-1},\ldots,$$

$$\mathrm{l}\,y_{2\nu-1} = v_{\nu-1} - \omega_{\nu-1}\sqrt{-1},$$

nous aurons en général

$$\frac{dy_k}{y_k} = dv_k + \sqrt{-1}\,d\omega_k,\quad \frac{dy_{k+\alpha}}{y_{k+\alpha}} = dv_k - \sqrt{-1}\,d\omega_k.$$

Alors au lieu de $dy_k\,dy_{k+\alpha}$ dans l'intégrale multiple, il faudra substituer l'expression

$$\left(\frac{dy_k}{dv_k}\cdot\frac{dy_{k+\alpha}}{d\omega_k} - \frac{dy_k}{d\omega_k}\cdot\frac{dy_{k+\alpha}}{dv_k}\right)dv_k\,d\omega_k,$$

qui se réduit à

$$-2\sqrt{-1}\,e^{2v_k}\,dv_k\,d\omega_k,$$

et l'on aura l'intégrale transformée

$$\mathrm{I} = \frac{2^{\nu}}{1\cdot 2\cdots\nu}\int^{(\nu,\nu-1)} e^{2v}\,e^{2v_1}\ldots e^{2v_{\nu-1}}\,dv\,dv_1\ldots dv_{\nu-1}\,d\omega\,d\omega_1\ldots d\omega_{\nu-1}.$$

Ayant posé

$$f(\alpha^{i}) = y_k = e^{v_k + \omega_k\sqrt{-1}},\quad f(\alpha^{-i}) = y_{k+\alpha} = e^{v_k - \omega_k\sqrt{-1}},$$

nous avons

$$f(\alpha^{i})\,.\,f(\alpha^{-i}) = e^{2v_k},\quad v_k = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left[f(\alpha^{i})\,.\,f(\alpha^{-i})\right];$$

les limites des nouvelles variables seront donc déterminées par les équations

$$v = z_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha) + z_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + z_{\nu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\nu-1}(\alpha),$$

$$v_1 = z_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{i}) + z_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{i}) + \ldots + z_{\nu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\nu-1}(\alpha^{i}).$$

. . . . . .

$$v_{\nu-1} = z_1\,\mathrm{l}\,\varepsilon_1(\alpha^{i^{\nu-2}}) + z_2\,\mathrm{l}\,\varepsilon_2(\alpha^{i^{\nu-2}}) + \ldots + z_{\nu-1}\,\mathrm{l}\,\varepsilon_{\nu-1}(\alpha^{i^{\nu-2}}).$$

où $z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda-1}$ sont contenus entre les limites 0 et 1. La condition $N f(\alpha) < 1$ donne, en outre,

$$e^{\vartheta_1} . e^{\vartheta_2} \ldots e^{\vartheta_{\mu-1}}$$

entre les limites 0 et 1.

Les μ variables $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{\mu-1}$, qui ne sont pas limitées par ces conditions, sont données comme fonctions des variables primitives $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-2}$ par l'équation

$$\operatorname{tang}(\omega_k) = \frac{f(x^{\lambda-1}) - f(x^{\lambda-2})}{\sqrt{-1}\left[f(x^{\lambda-1}) + f(x^{\lambda-2})\right]},$$

expression où les quantités imaginaires disparaissent d'elles-mêmes; et, puisque les quantités $x, x_1, \ldots, x_{\lambda-2}$ peuvent varier entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, on voit que la même chose aura lieu pour $\operatorname{tang}(\omega_k)$: et, en considérant encore que $\sin\omega_k$ et $\cos\omega_k$ peuvent avoir toutes les valeurs entre les limites -1 et $+1$, on conclut que les limites des variables $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\mu-1}$ seront $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$, ou tout autre intervalle de 2π. En effectuant les intégrations par rapport à ces variables, entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$, on a

$$I = \frac{2^{\mu-1}\pi^{\mu}}{\lambda^{\mu}} \int e^{\vartheta_1} . e^{\vartheta_2} \ldots e^{\vartheta_{\mu-1}} d\vartheta . d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{\mu-1}.$$

Intégrons à présent par rapport à la variable $v_{\mu-1}$, nous aurons

$$\int e^{\vartheta_{\mu-1}} d\vartheta_{\mu-1} = \frac{1}{2} e^{\vartheta_{\mu-1}},$$

les limites de cette intégration étant données par la condition $e^{\vartheta_1} . e^{\vartheta_2} \ldots e^{\vartheta_{\mu-1}} \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$, et celles de $e^{\vartheta_{\mu-1}}$ étant 0 et $e^{-\vartheta_1} . e^{-\vartheta_2} \ldots e^{-\vartheta_{\mu-2}}$.

L'intégration entre ces limites donne le résultat très-simple

$$\frac{2^{\mu-1}\pi^{\mu}}{\lambda^{\mu}} \int e^{\vartheta_{\mu-1}} d\vartheta . d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{\mu-1}.$$

Il nous reste encore à effectuer la dernière transformation de cette

intégrale, qui consiste dans la substitution des variables $z_1, z_2, \ldots, z_{\mu-1}$ données par les équations

$$v_1 = z_1 l\varepsilon_1(\alpha) + z_2 l\varepsilon_2(\alpha) + \ldots + z_{\mu-1} l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha),$$

$$v_2 = z_1 l\varepsilon_1(\alpha') + z_2 l\varepsilon_2(\alpha') + \ldots + z_{\mu-1} l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha'),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_{\mu-1} = z_1 l\varepsilon_1(\alpha^{(\mu-2)}) + z_2 l\varepsilon_2(\alpha^{(\mu-2)}) + \ldots + z_{\mu-1} l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{(\mu-2)}),$$

au lieu des variables $v_1, v_2, \ldots, v_{\mu-1}$. En désignant, comme ci-dessus, par Δ le déterminant de ce système d'équations linéaires, nous avons tout de suite l'intégrale transformée, et, parce que toutes les intégrations par rapport aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_{\mu-1}$, doivent être prises entre les limites 0 et 1, la nouvelle intégrale est évidemment égale à l'unité. Donc la valeur cherchée de l'intégrale I devient

$$I = \frac{2^{\mu-1}\pi^{\mu}\Delta}{\sqrt{D}}.$$

De là résulte cette expression de la somme proposée

$$\sum \frac{1}{[N f(\alpha)]^s} = \frac{2^{\mu-1}\pi^{\mu}\Delta}{\sqrt{D}}, \quad \text{pour } s = 1.$$

Nous allons maintenant démontrer que toutes les autres sommes partielles de l'expression

$$\sum \frac{1}{[N f(\alpha)]^s} - \sum \frac{1}{[N f_1(\alpha)]^s} + \sum \frac{1}{[N f_2(\alpha)]^s} - \ldots \sum \frac{1}{[N f_{h-1}(\alpha)]^s}$$

ont les mêmes valeurs que la première, que nous venons de trouver. Pour cela, soit $\varphi(\alpha)$ un multiplicateur idéal qui, joint aux nombres idéaux de la classe $f_k(\alpha)$, les rend tous existants, et posons

$$\varphi(\alpha) f_k(\alpha) = F_k(\alpha);$$

nous aurons

$$\sum \frac{1}{[N f_k(\alpha)]^s} = N\varphi(\alpha) \sum \frac{1}{[N F_k(\alpha)]^s}, \quad \text{pour } s = 1.$$

où $F_k(\alpha)$ désigne tous les nombres complexes existants qui ont le facteur idéal $\varphi(\alpha)$. La recherche de la valeur de la somme

$$\sum \frac{s-1}{[N F_k(\alpha)]^s}, \quad \text{pour } s = 1,$$

se fera de la même manière que celle de la somme trouvée ci-dessus, avec la seule différence qu'il y aura quelques conditions de plus pour les coefficients des nombres $F_k(\alpha)$, pour exprimer que $F_k(\alpha)$ doit contenir le facteur idéal $\varphi(\alpha)$. Supposons que $\varphi(\alpha)$ contient un certain facteur premier idéal de q, m fois, de plus un facteur premier idéal de q', m' fois, etc., où q, q', etc., appartiennent respectivement aux exposants f, f', etc.; la condition que $F_k(\alpha)$ soit divisible par $\varphi(\alpha)$ sera exprimée par f congruences linéaires pour les coefficients de $F_k(\alpha)$ par rapport au module q^m, de plus par f' congruences linéaires pour le module $q'^{m'}$, etc. Or il est clair qu'étant donné f congruences linéaires par rapport aux coefficients du nombre $F_k(\alpha)$, pour le module q^m, le nombre de tous les systèmes des valeurs convenables de ces coefficients se réduira à la $q^{mf\,ième}$ partie; de même, les f' congruences pour le module $q'^{m'}$ réduiront ce nombre de valeurs à la $q'^{m'f'\,ième}$ partie, et ainsi de suite. On en conclut que la valeur de la somme proposée sera égale à la $q^{mf}.q'^{m'f'}\ldots^{ième}$ partie de la valeur de la somme trouvée ci-dessus, et, puisque le produit $q^{mf}.q'^{m'f'}\ldots$ est égal à la norme $N\varphi(\alpha)$, on aura

$$\sum \frac{s-1}{[N F_k(\alpha)]^s} = \frac{1}{N\varphi(\alpha)} \sum \frac{s-1}{[N f(\alpha)]^s}, \quad \text{pour } s = 1;$$

enfin cette équation, jointe à la précédente, donne

$$\sum \frac{s-1}{[N f(\alpha)]^s} = \sum \frac{s-1}{[N f(\alpha)]^s}, \quad \text{pour } s = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le nombre des sommes partielles qui donnent la somme totale R étant égal à H, nous avons

$$R = H \sum \frac{s-1}{[N f(\alpha)]^s}, \quad \text{pour } s = 1;$$

d'où, en substituant la valeur trouvée de cette somme, nous avons la

nouvelle expression

$$R = \frac{2^{2\mu-2}\pi^{\mu}\Delta H}{\lambda^{\mu}};$$

ce qui, comparé à la valeur de la même série R, trouvée dans la première partie de cette recherche,

$$R = \frac{2^{\mu-1}\pi^{\mu}P.D}{\lambda^{2\mu-1}},$$

donne l'expression cherchée du nombre des classes des nombres complexes idéaux

$$H = \frac{P.D}{(2\lambda)^{\mu-1}.\Delta}.$$

Je répète que dans cette formule la lettre P désigne le produit

$$P = \varphi(\beta)\,\varphi(\beta^2)\,\varphi(\beta^3)\ldots\varphi(\beta^{\lambda-2}),$$

où β est une racine primitive de l'équation $\beta^{\lambda-1} = 1$, et où

$$\varphi(\beta) = 1 + \gamma_1\beta + \gamma_2\beta^2 + \gamma_3\beta^3 + \ldots + \gamma_{\lambda-2}\beta^{\lambda-2}.$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{\lambda-2}$ étant les plus petits restes positifs des puissances $\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots, \gamma^{\lambda-2}$ d'une racine primitive γ pour le module λ. La lettre μ n'est qu'un signe abrégé de $\frac{\lambda-1}{2}$. D désigne le déterminant des quantités

$$\begin{array}{l}
le(\alpha),\quad le\left(\alpha^{\gamma}\right),\ldots,\quad le\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right),\\
le(\alpha^{\gamma}),\quad le\left(\alpha^{\gamma^2}\right),\ldots,\quad le\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
le\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right),\quad le\left(\alpha^{\gamma^{\mu-1}}\right),\ldots,\quad le\left(\alpha^{\gamma^{\mu-2}}\right),
\end{array}$$

ou

$$e(\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\alpha^{\gamma}).(1-\alpha^{-\gamma})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}} = \pm\,\alpha^{\mu(\gamma-1)}\,\frac{1-\alpha^{\gamma}}{1-\alpha}.$$

Δ désigne le déterminant des quantités

$$\begin{array}{l} l\,\varepsilon_1(\alpha),\quad l\,\varepsilon_2(\alpha),\ldots,\quad l\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha), \\ l\,\varepsilon_1(\alpha^7),\quad l\,\varepsilon(\alpha^7),\ldots,\quad l\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^7), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l\,\varepsilon_1(\alpha^{7^{\mu-2}}),\quad l\,\varepsilon_2(\alpha^{7^{\mu-2}}),\ldots,\quad l\,\varepsilon_{\mu-1}(\alpha^{7^{\mu-2}}), \end{array}$$

où $\varepsilon_1(\alpha), \varepsilon_2(\alpha), \ldots, \varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ représentent un système de $\mu - 1$ unités fondamentales.

Nous terminerons ce paragraphe en faisant quelques remarques sur la formule trouvée pour le nombre H des classes des nombres complexes idéaux. D'abord nous observons que le nombre H consiste de deux facteurs entiers bien distincts, le premier égal à $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$, le second égal à $\frac{D}{\Delta}$. On démontre aisément que le premier de ces facteurs est un nombre entier, en faisant voir que le produit P contient $(\mu - 1)$ fois le facteur 2, et autant de fois le facteur λ; pour le second facteur, cela découle immédiatement de l'observation faite à la fin du § II de ce Mémoire. Pour le cas de $\lambda = 5$, nous avons trouvé que l'unité $e(\alpha)$ est une unité fondamentale, d'où il suit $D = \Delta$; donc on a

$$\frac{D}{\Delta} = 1, \quad \text{pour} \quad \lambda = 5.$$

Pour le cas de $\lambda = 7$, on trouve sans difficulté que $e(\alpha)$ et $e(\alpha^7)$ sont encore deux unités fondamentales; donc on a de même

$$D = \Delta \quad \text{et} \quad \frac{D}{\Delta} = 1, \quad \text{pour} \quad \lambda = 7.$$

Mais si λ est plus grand, le calcul effectif de ce second facteur est très-pénible, parce qu'il exige qu'on recherche d'abord un système d'unités fondamentales. Le calcul du premier facteur $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$, que nous désignerons simplement comme fonction de λ par $P'(\lambda)$, n'offre pas cette difficulté; je l'ai calculé pour toutes les valeurs du nombre premier λ

de la première centaine. Voici les résultats de ce calcul :

$$
\begin{array}{ll}
P'(3) = 1, & P'(43) = 211, \\
P'(5) = 1, & P'(47) = 695 = 5.139, \\
P'(7) = 1, & P'(53) = 4889, \\
P'(11) = 1, & P'(59) = 41241 = 3.59.233, \\
P'(13) = 1, & P'(61) = 76301 = 41.1861, \\
P'(17) = 1, & P'(67) = 853513 = 67.12739, \\
P'(19) = 1, & P'(71) = 5472271 = 7.7.29.3851, \\
P'(23) = 3, & P'(73) = 11957417 = 89.134353, \\
P'(29) = 8, & P'(79) = 60087849 = 5.53.377911, \\
P'(31) = 9, & P'(83) = 838216959 = 3.279405653, \\
P'(37) = 37, & P'(89) = 13379363737 = 113.118401449, \\
P'(41) = 121, & P'(97) = 411322823001 = 3457.118982593.
\end{array}
$$

On voit que ces nombres vont en croissant avec une rapidité extraordinaire. La loi asymptotique des valeurs de ce premier facteur du nombre des classes H est exprimée par la formule

$$P'(\lambda) = \frac{P}{(2\lambda)^{\frac{\lambda-1}{2}}} = \frac{\lambda^{\frac{\lambda-3}{2}}}{2^{\frac{\lambda-1}{2}} \cdot \pi^{\frac{\lambda-1}{2}}},$$

dont je me réserve la démonstration et les développements ultérieurs à une autre occasion.

§ IX.

Deux recherches spéciales concernant le nombre des classes des nombres complexes idéaux et les unités complexes.

En examinant les valeurs du premier facteur du nombre H, données dans le paragraphe précédent, on voit que, pour les trois nombres premiers de la première centaine

$$\lambda = 37, \quad \lambda = 59 \quad \text{et} \quad \lambda = 67,$$

le nombre H est divisible par λ. Pour de telles valeurs de λ, les nombres complexes sont doués de quelques propriétés singulières, de manière que ces valeurs de λ se présentent dans plusieurs recherches générales comme cas d'exception qui exigent des méthodes particulières. C'est pour cette raison que nous nous proposons ici le problème *de trouver tous les nombres premiers λ pour lesquels le nombre* H *des classes des nombres complexes idéaux est divisible par λ.*

Nous commençons par discuter le premier facteur $\frac{P}{\varphi(\beta)^{\gamma-1}}$ du nombre

$$H = \frac{P}{\varphi(\beta)^{\gamma-1}} \cdot \frac{D}{\lambda},$$

où nous avons posé

$$P = \varphi(\beta) \cdot \varphi(\beta^3) \cdot \varphi(\beta^5) \cdots \varphi(\beta^{\gamma-2}),$$

$$\varphi(\beta) = 1 + \gamma_1\beta + \gamma_2\beta^2 + \gamma_3\beta^3 + \ldots + \gamma_{\gamma-2}\beta^{\gamma-2}.$$

En multipliant par $\gamma(\beta - 1)$, on a la formule

$$\gamma(\beta - 1)\varphi(\beta) = (\gamma_{\gamma-2} - 1) + (\gamma - \gamma_1)\beta + (\gamma_1 - \gamma_3)\beta^2 + \ldots$$
$$+ (\gamma_{\gamma-3} - \gamma_{\gamma-2})\beta^{\gamma-2},$$

dans laquelle tous les coefficients sont divisibles par λ; car, en substituant

$$\gamma_{k+1} \equiv \gamma^{k+1} \quad \text{et} \quad \gamma_k \equiv \gamma^k \pmod{\lambda},$$

on a

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \equiv \gamma^{k+1} - \gamma^k \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Donc, en posant

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = \lambda b_k$$

et

$$b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \ldots + b_{\gamma-2}\beta^{\gamma-2} = \psi(\beta),$$

l'équation précédente donne

$$\gamma(\beta - 1)\varphi(\beta) = \lambda\psi(\beta).$$

En changeant β en $\beta^3, \beta^5, \ldots, \beta^{\gamma-2}$ et multipliant, on trouve

$$\gamma^{\gamma-1}(\beta - 1)(\beta^3 - 1)\ldots(\beta^{\gamma-2} - 1)P = \lambda^{\gamma-1}\psi(\beta)\cdot\psi(\beta^3)\ldots\psi(\beta^{\gamma-2}),$$

et, comme on a

$$\gamma(\beta - 1)(\gamma\beta^3 - 1)(\gamma\beta^5 - 1)\dots(\gamma\beta^{\gamma^\mu - 2} - 1) = \gamma^\mu - 1,$$

cette équation devient

$$(\gamma^\mu + 1)P = \lambda^\mu \psi(\beta)\cdot\psi(\beta^3)\dots\psi(\beta^{\gamma^\mu - 2}).$$

Le nombre $\gamma^\mu + 1$, γ étant une racine primitive et $\mu = \frac{\gamma - 1}{2}$, est toujours divisible par λ, on pourra donc poser $\gamma^\mu + 1 = \lambda G$, où G est un entier; on pourra aussi toujours choisir la racine primitive γ, telle que $\gamma^\mu + 1$ ne soit pas divisible par λ^2, c'est-à-dire que G ne soit pas divisible par λ. Cela étant, on aura

$$\gamma^{\mu-1} G \cdot \frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}} = \psi(\beta)\cdot\psi(\beta^3)\dots\psi(\beta^{\gamma^\mu - 2}),$$

et, puisqu'en substituant la racine primitive γ de la congruence

$$\gamma^{\gamma - 1} \equiv 1 \pmod{\lambda}$$

à la racine de l'équation

$$\beta^{\gamma - 1} = 1,$$

on a évidemment

$$\psi(\beta)\cdot\psi(\beta^3)\dots\psi(\beta^{\lambda - 2}) \equiv \psi(\gamma)\cdot\psi(\gamma^3)\dots\psi(\gamma^{\lambda - 2}) \pmod{\lambda},$$

cette équation donne la congruence

$$\gamma^{\mu-1} G \cdot \frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}} \equiv \psi(\gamma)\cdot\psi(\gamma^3)\dots\psi(\gamma^{\gamma^\mu - 2}) \pmod{\lambda}.$$

Il suit de là que le premier facteur $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ du nombre des classes H sera ou ne sera pas divisible par λ, selon que parmi les facteurs du produit $\psi(\gamma)\cdot\psi(\gamma^3)\dots\psi(\gamma^{\gamma^\mu - 2})$ il y en a un ou il n'y en a aucun divisible par λ. Ainsi tout se réduit à examiner si la congruence

$$\begin{aligned}\psi(\gamma^{2n-1}) = b_0 + b_1\gamma^{2\lambda-1} + b_2\gamma^{2\cdot 2\lambda-1} + \dots \\ + b_{\lambda-2}\gamma^{(\lambda-2)(2\lambda-1)} \equiv 0 \pmod{\lambda}\end{aligned}$$

est ou n'est pas remplie pour une quelconque des valeurs de $n = 1, 3, 5, \dots, \mu$.

En divisant par γ^{2n-1}, puis changeant les exposants $1, 2, 3, \ldots, \lambda - 1$ en indice, au moyen de la congruence $\gamma^k \equiv \gamma_k \pmod{\lambda}$, on aura la congruence équivalente

$$b_0 \gamma_{\lambda-1}^{2n-1} + b_1 + b_2 \gamma_1^{2n-1} + b_3 \gamma_2^{2n-1} + \ldots + b_{\lambda-2} \gamma_{\lambda-3}^{2n-1} \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Or il suit de la définition même des coefficients $\lambda b_k = \gamma \gamma_{k-1} - \gamma_k$ qu'on a $b_k = 0$, pour toutes les valeurs de γ_{k-1} comprises entre les limites 0 et $\frac{\lambda}{\gamma}$, $b_k = 1$ pour toutes les valeurs de γ_{k-1} comprises entre les limites $\frac{\lambda}{\gamma}$ et $\frac{2\lambda}{\gamma}$, et généralement $b_k = s$ pour toutes les valeurs comprises entre les limites $\frac{s\lambda}{\gamma}$ et $\frac{(s+1)\lambda}{\gamma}$. Donc, en comprenant tous les termes de cette congruence, pour lesquels les coefficients b_k ont la même valeur, et en désignant généralement par t_s le plus grand entier contenu dans $\frac{s\lambda}{\gamma}$, on pourra la mettre sous cette forme,

$$\begin{aligned}
&1\left[(t_1+1)^{2n-1} + (t_1+2)^{2n-1} + \ldots + t_2^{2n-1}\right],\\
&+ 2\left[(t_2+1)^{2n-1} + (t_2+2)^{2n-1} + \ldots + t_3^{2n-1}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (\gamma-1)\left[(t_{\gamma-1}+1)^{2n-1} + (t_{\gamma-1}+2)^{2n-1} + \ldots\right.\\
&\qquad\qquad \left. + (\lambda-1)^{2n-1}\right] \equiv 0 \pmod{\lambda}.
\end{aligned}$$

Nous nous servirons ici de la fonction rationnelle et entière de la variable x,

$$\chi(x) = \frac{x}{\Pi_n} - \frac{1}{2\Pi_{n-1}} + \frac{B_1 x}{\Pi_{n-2}\Pi_1} - \frac{B_2 x^{2n-3}}{\Pi_{n-3}\Pi_3} + \ldots + \frac{(-1)^n B_n x^n}{\Pi_1 \Pi_{2n}},$$

dans laquelle $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ désignent les nombres bernoulliens, et Π_r le produit $1.2.3\ldots r$. Dans le cas où x est un nombre entier positif, la fonction $\chi(x)$ exprime la série des puissances $(2n-1)^{\text{ièmes}}$ des nombres naturels, car on a la formule connue

$$1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \ldots + (x-1)^{2n-1} = \Pi_{2n-1}\chi(x).$$

Au moyen de cette formule, la congruence proposée se représente de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&\chi(t_2+1)-\chi(t_1+1)\\&+2[\chi(t_3+1)-\chi(t_2+1)]+3[\chi(t_4+1)-\chi(t_3+1)]+\ldots\\&+(\gamma-1)[\chi(\lambda)-\chi(t_{\gamma-1}+1)]\equiv 0 \pmod{\lambda},\end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$\chi(t_1+1)+\chi(t_2+1)+\chi(t_3+1)+\ldots+\chi(t_{\gamma-1}+1)\equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Le nombre t_s étant le plus grand entier contenu dans la fraction $\frac{s\lambda}{\gamma}$, pourra être mis sous la forme

$$t_s=\frac{s\lambda-r_s}{\gamma},$$

où r_s sera un nombre positif, moindre que γ, et la congruence proposée prendra la forme

$$\begin{aligned}&\chi\left(\frac{\lambda-r_1+\gamma}{\gamma}\right)+\chi\left(\frac{2\lambda-r_2+\gamma}{\gamma}\right)+\ldots\\&\qquad+\chi\left(\frac{(\gamma-1)\lambda-r_{\gamma-1}+\gamma}{\gamma}\right)\equiv 0 \pmod{\lambda},\end{aligned}$$

d'où, en négligeant les multiples du module λ, on aura la congruence simplifiée

$$\chi\left(\frac{\gamma-r_1}{\gamma}\right)+\chi\left(\frac{\gamma-r_2}{\gamma}\right)+\ldots+\chi\left(\frac{\gamma-r_{\gamma-1}}{\gamma}\right)\equiv 0 \pmod{\lambda},$$

dans laquelle on pourra faire disparaître les fractions en multipliant par les dénominateurs, dont aucun ne contient le facteur λ. Les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{\gamma-1}$ coïncident avec les nombres $1, 2, 3, \ldots, \gamma-1$, pris dans un ordre convenable; car on sait qu'ils sont tous positifs, moindres que γ, et l'on démontre aisément qu'ils sont tous différents entre eux. Donc, en mettant $1, 2, \ldots, \gamma-1$, au lieu de $r_1, r_2, \ldots, r_{\gamma-1}$, on obtient la congruence

$$\chi\left(\frac{1}{\gamma}\right)+\chi\left(\frac{2}{\gamma}\right)+\chi\left(\frac{3}{\gamma}\right)+\ldots+\chi\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Pour obtenir l'expression la plus simple de cette congruence, nous

développerons ici une formule nouvelle, contenant une propriété curieuse de la fonction $\chi(x)$. Pour cela, nous partons du développement en série, ordonnée suivant les cosinus des multiples de $2x\pi$,

$$\chi(x) = \frac{(-1)^n B_n}{H} - \frac{(-1)^n 2}{2\pi^{2n}}\left(\frac{\cos 2x\pi}{1^{2n}} + \frac{\cos 4x\pi}{2^{2n}} + \frac{\cos 6x\pi}{3^{2n}} + \ldots\right),$$

dans lequel x doit être pris entre les limites o et 1. En prenant successivement $x = 0, \frac{1}{\gamma}, \frac{2}{\gamma}, \ldots, \frac{\gamma-1}{\gamma}$, et ajoutant ces équations, en observant que la série

$$1 + \cos\frac{2k\pi}{\gamma} + \cos\frac{4k\pi}{\gamma} + \ldots + \cos\frac{2(\gamma-1)k\pi}{\gamma}$$

est égale à γ, si k est un multiple de γ, et qu'elle est égale à zéro dans tous les autres cas, on obtient

$$\chi\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \chi\left(\frac{2}{\gamma}\right) + \chi\left(\frac{3}{\gamma}\right) + \ldots + \chi\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n \gamma B_n}{H_{2n}} - \frac{(-1)^n 2\gamma}{(2\pi)^{2n}}\left[\frac{1}{\gamma^{2n}} + \frac{1}{(2\gamma)^{2n}} + \frac{1}{(3\gamma)^{2n}} + \ldots\right].$$

et puisqu'on a

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2 H_{2n}},$$

l'équation précédente se réduit à

$$\chi\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \chi\left(\frac{2}{\gamma}\right) + \ldots + \chi\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) = \frac{(-1)^n (\gamma^{2n}-1) B_n}{\gamma^{2n-1} H_{2n}}.$$

A cause de cette propriété de la fonction $\chi(x)$, la congruence de laquelle dépend la divisibilité par λ du premier facteur du nombre des classes H, prend la forme

$$\frac{\gamma^{2n}-1}{\gamma} \frac{B_n}{H_{2n}} \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Le dénominateur $\gamma^{2n-1} H_{2n}$ peut être rejeté, parce qu'il ne contient pas le facteur λ; de même, le facteur $\gamma^{2n}-1$, qui n'est pas divisible par λ pour les valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots, \mu-1$, pourra être négligé dans tous ces cas, en sorte qu'on a simplement

$$B_n \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Le cas de $n = \mu$, où $\gamma^{2\mu} - 1$ est divisible par λ, en sorte que B_μ contient le facteur λ en dénominateur, exige une discussion particulière. D'après une formule connue, le nombre bernoullien B_μ s'exprime au moyen des nombres bernoulliens précédents, de la manière suivante :

$$B_\mu = \frac{\Pi_{2\mu} B_{\mu-1}}{2^{\mu} \Pi \Pi_{2\mu-2}} - \frac{\Pi_{2\mu} B_{\mu-2}}{2^{\mu} \Pi \Pi_{2\mu-4}} + \ldots + \frac{(-1)^{\mu}}{2^{2\mu} (2\mu+1)} + \frac{-1}{2^{2\mu}},$$

où l'avant-dernier terme est le seul qui contienne le facteur $2\mu + 1 = \gamma$ en dénominateur. On aura donc

$$B_\mu = \frac{-1^{\mu}}{2^{2\mu} \cdot \lambda} + \frac{M}{N},$$

où N n'est pas divisible par λ, et en multipliant par

$$\gamma^{2\mu} - 1 = (\gamma^{\mu} - 1)(\gamma^{\mu} + 1) = (\gamma^{\mu} - 1)\lambda G,$$

on obtient l'équation

$$\chi\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \chi\left(\frac{2}{\gamma}\right) \cdots \chi\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) = \frac{(-1)^{\mu} G(\gamma^{\mu} - 1)}{\gamma^{2\mu - 1} \Pi_{2\mu}} \left[\frac{(-1)^{\mu}}{2^{2\mu}} + \frac{\lambda M}{N} \right].$$

La congruence de condition, posée ci-dessus, devient donc, dans le cas de $n = \mu$,

$$\frac{G(\gamma^{\mu} - 1)}{2^{2\mu} \gamma^{2\mu - 1} \Pi_{2\mu}} \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

d'où, en ayant égard à l'hypothèse que G n'est pas divisible par λ, on voit qu'elle n'est satisfaite pour aucune valeur du nombre premier λ. Ainsi la divisibilité par λ du premier facteur du nombre H dépend de ce que la congruence $B_n \equiv 0 \pmod{\lambda}$ ait lieu pour une quelconque des valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots, \mu - 1$. Le résultat trouvé donne le théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que le premier facteur $\frac{P}{2\gamma^{\mu-1}}$ *du nombre des classes* H *soit divisible par* λ, *consiste en ce qu'un quelconque des* $\frac{\gamma - 3}{2}$ *premiers nombres bernoulliens soit divisible par* λ.

Passons à la discussion du second facteur $\frac{D}{\Delta}$ du nombre H. En vertu d'un théorème démontré dans le § II de ce Mémoire, une certaine puissance de toute unité complexe s'exprime comme produit de puissances entières du système indépendant $e(\alpha)$, $e(\alpha^\gamma)$,..., $e(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})$; nous pouvons donc poser, comme à l'endroit cité,

$$\varepsilon_1(\alpha)^{n_1} = e(\alpha)^{r_1^1} . e(\alpha^\gamma)^{r_2^1} \ldots e(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})^{r_{\mu-1}^1},$$

$$\varepsilon_2(\alpha)^{n_2} = e(\alpha)^{r_1^2} . e(\alpha^\gamma)^{r_2^2} \ldots e(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})^{r_{\mu-1}^2}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)^{n_{\mu-1}} = e(\alpha)^{r_1^{\mu-1}} . e(\alpha^\gamma)^{r_2^{\mu-1}} \ldots e(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})^{r_{\mu-1}^{\mu-1}}.$$

en supposant que $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$,..., $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ désignent un système d'unités fondamentales, et que l'exposant n_h n'ait aucun facteur commun avec tous les exposants r_1^h, r_2^h,..., $r_{\mu-1}^h$. Nous obtiendrons de là, comme dans le § II,

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{n_1 . n_2 \ldots n_{\mu-1}}{R}.$$

d'où il suit que $\frac{D}{\Delta}$ ne pourra être divisible par λ, à moins qu'un des nombres n_1, n_2,..., $n_{\mu-1}$ ne soit divisible par λ, c'est-à-dire qu'on ait une équation de la forme

$$\varepsilon(\alpha)^n = e(\alpha)^{r_1} . e(\alpha^\gamma)^{r_2} \ldots e(\alpha^{\gamma^{\mu-2}})^{r_\mu},$$

dans laquelle n soit divisible par λ, sans que les exposants r_1, r_2,..., $r_{\mu-1}$ soient tous divisibles par λ.

Or, on démontre aisément que la $\lambda^{ième}$ puissance de tout nombre complexe existant est congrue à un nombre entier non complexe pour le module λ. En effet, en élevant à la $\lambda^{ième}$ puissance le polynôme

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

et négligeant tous les termes divisibles par λ, il ne restera que les $\lambda^{ièmes}$

puissances des termes du polynôme, et l'on aura généralement

$$f(\alpha)^r = a^r + a_1^r + a_2^r + \ldots + a_{\mu-1}^r$$

$$= a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{\mu-1} \pmod{\lambda}.$$

La puissance $\varepsilon(\alpha)^n$, n étant divisible par λ, sera donc congrue à un nombre entier non complexe c. En le substituant dans l'équation précédente, on aura une condition nécessaire pour que le facteur $\frac{D}{\Delta}$ soit divisible par λ, exprimée par la congruence

$$e(\alpha)^{r_1} \cdot e(\alpha^2)^{r_2} \ldots e(\alpha^{\mu-1})^{r_{\mu-1}} = c \pmod{\lambda},$$

laquelle doit avoir lieu pour des valeurs entières des exposants $r_1, r_2, \ldots, r_{\mu-1}$, qui ne sont pas tous divisibles par λ.

La recherche des valeurs du nombre premier λ pour lesquelles cette congruence puisse avoir lieu se fait au moyen d'une méthode générale, dont le point principal consiste en ce que, dans une équation contenant des nombres complexes, on introduit une variable continue x, au lieu de la racine α. Étant donnée une équation

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) \quad \text{ou} \quad f(\alpha) - \varphi(\alpha) = 0,$$

qui aura lieu pour toutes les valeurs de α qui satisfont à l'équation

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0,$$

la fonction rationnelle et entière de la variable x, $f(x) - \varphi(x)$ sera égale à zéro pour toutes les valeurs de $x = \alpha$, $x = \alpha^2, \ldots, x = \alpha^{\lambda-1}$, d'où l'on conclut qu'elle sera divisible par

$$(x - \alpha)(x - \alpha^2) \ldots (x - \alpha^{\lambda-1}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{\lambda-1};$$

on pourra donc poser

$$f(x) - \varphi(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{\lambda-1})\psi(x),$$

ou

$$f(x) = \varphi(x) + (1 + x + x^2 + \ldots + x^{\lambda-1})\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction rationnelle et entière de la variable x.

Pour faire l'application à la congruence proposée, nous la réduirons d'abord à l'équation

$$e(\alpha)^{r_1}\,e(\alpha^2)^{r_2}\ldots e\left(\alpha^{\nu-1}\right)^{r_{\nu-1}} = c + \lambda\varphi(\alpha),$$

dans laquelle $\varphi(\alpha)$ désigne un nombre entier complexe. En substituant la variable x au lieu de la racine α, on aura

$$e(x)^{r_1}\,e(x^2)^{r_2}\ldots e\left(x^{\nu-1}\right)^{r_{\nu-1}}$$
$$= c + \lambda\varphi(x) + (1 + x + x^2 + \ldots + x^{\nu-1})\,\psi(x).$$

Si maintenant on prend les différentielles des logarithmes des deux membres de cette équation, et qu'après avoir multiplié par x, on restitue la valeur particulière $x = \alpha$, on en tire l'équation

$$r_1\frac{\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)} + r_2\left(\frac{\alpha^2 e'(\alpha^2)}{e(\alpha^2)}\right) + \ldots + r_{\nu-1}\alpha^{\nu-1}\frac{e'(\alpha^{\nu-1})}{e(\alpha^{\nu-1})}$$
$$= \frac{\lambda\alpha\varphi'(\alpha)}{c + \lambda\varphi(\alpha)} + [\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda - 1)\alpha^{\lambda-1}]\,\psi(\alpha),$$

où, suivant la notation de Lagrange, $e'(x)$ et $\varphi'(x)$ désignent les premières dérivées de $e(x)$ et $\varphi(x)$. De là, en rejetant les multiples de λ et faisant, pour abréger,

$$\frac{\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)} = F(\alpha),$$

on aura la congruence

$$r_1 F(\alpha) + r_2 F(\alpha^2) + \ldots + r_{\nu-1}\alpha^{\nu-1} F(\alpha^{\nu-1})$$
$$\equiv \frac{\lambda}{c}[\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda - 1)\alpha^{\lambda-1}]\,\psi(\alpha) \pmod{\lambda}.$$

En mettant le nombre complexe $\psi(\alpha)$ sous la forme

$$\psi(\alpha) = a + (1 - \alpha)\psi_1(\alpha),$$

où a est un entier non complexe, et observant qu'on a

$$(1 - \alpha)[\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda - 1)\alpha^{\lambda-1}] = -\lambda,$$

puis faisant enfin

$$M \equiv \frac{\lambda a}{c} \pmod{\lambda},$$

on aura

$$r_1 F(\alpha) + r_2 \gamma F(\alpha^2) + \ldots + r_{\lambda-1} \gamma^{\lambda-2} F(\alpha^{\lambda-1})$$
$$= M[\alpha + 2\alpha^2 + \ldots + (\lambda - 1)\alpha^{\lambda-1}].$$

Développons actuellement le nombre entier complexe $F(\alpha)$. En prenant la différentielle logarithmique de l'expression

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{(1-x^\lambda)(1-x^{\lambda-1})}{(1-x)(1-x^{\lambda-2})}},$$

on obtient

$$\frac{2x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1+x}{1-x} - \frac{\gamma(1+x^\gamma)}{1-x^\gamma};$$

d'où, en restituant la valeur particulière $x = \alpha$,

$$F(\alpha) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{\gamma(1+\alpha^\gamma)}{1-\alpha^\gamma}.$$

Le développement ultérieur se fait au moyen de l'équation

$$(1-\alpha)[\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda - 1)\alpha^{\lambda-1}] = -\lambda,$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{1-\alpha} = -\frac{[\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda-1)\alpha^{\lambda-1}]}{\lambda},$$

et en multipliant par $1 + \alpha$,

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = -\frac{[\lambda + 2\alpha + 4\alpha^2 + 6\alpha^3 + \ldots + 2(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1}]}{\lambda}.$$

Lorsqu'on y remplace les coefficients $1, 2, 3, \ldots, \lambda - 1$ par les nombres $1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\lambda-2}$, qui, abstraction faite de l'ordre, sont absolument les mêmes, et qu'en même temps, au lieu des exposants correspondants, on met $1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{\lambda-2}$, cette équation prend la forme

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{(\lambda + 2\alpha + 2\gamma_1\alpha^\gamma + 2\gamma_2\alpha^{\gamma^2} + \ldots + 2\gamma_{\lambda-2}\alpha^{\gamma^{\lambda-2}})}{\lambda}.$$

Si l'on change α en α^γ, et qu'on multiplie par γ, on aura aussi

$$\frac{\gamma\,(1-\alpha^{\gamma})}{1-\alpha^{\gamma}} = -\frac{(\gamma + 2\gamma r_{\gamma-2}\alpha + 2\gamma\alpha^{\gamma} + 2\gamma r_{\gamma}\alpha^{\gamma} + \ldots + 2\gamma r_{\gamma-1}\alpha^{\gamma(\gamma-2)})}{\lambda};$$

enfin, en soustrayant cette équation de la précédente, on obtient le développement

$$F(\alpha) = \gamma - 1 + \frac{2(\gamma r_{\gamma-2} - 1)}{\lambda}\alpha + \frac{2(\gamma - r_{\gamma})}{\lambda}\alpha^{\gamma} + \ldots$$
$$+ \frac{2(\gamma r_{\gamma-1} - r_{\gamma-2})}{\lambda}\alpha^{\gamma(\gamma-2)},$$

dans lequel les coefficients sont les mêmes que ceux que nous avons désignés par b_k, dans la première partie de cette recherche. En adoptant les mêmes signes, nous avons

$$F(\alpha) = \gamma - 1 + 2b_0\alpha + 2b_1\alpha^{\gamma} + 2b_2\alpha^{\gamma^2} + \ldots + 2b_{\gamma-2}\alpha^{\gamma^{\gamma-2}}.$$

Substituons le développement trouvé de $F(\alpha)$, de même que ceux de $F(\alpha^\gamma)$, $F(\alpha^{\gamma^2})$, etc., qu'on en déduit par le changement de α en α^γ, α^{γ^2}, etc., dans la congruence proposée, dont le second membre pourra être mis dans la forme

$$M\left(\alpha + \gamma\alpha^{\gamma} + \gamma^2\alpha^{2\gamma} + \ldots + \gamma^{\gamma-2}\alpha^{\gamma(\gamma-2)}\right).$$

Comparons séparément les coefficients des termes multipliés par α, $\alpha^\gamma, \alpha^{\gamma^2}, \ldots, \alpha^{\gamma^{\gamma-2}}$, et nous aurons ce système de congruences :

$$\left.\begin{array}{l}
r_1 b_0 + \gamma r_2 b_{\gamma-2} + \gamma^2 r_3 b_{\gamma-3} + \ldots + \gamma^{\gamma-2} r_{\gamma-1} b_{\gamma-\gamma+1} - R \equiv M \\
r_1 b_1 + \gamma r_2 b_0 + \gamma^2 r_3 b_{\gamma-2} + \ldots + \gamma^{\gamma-2} r_{\gamma-1} b_{\gamma-\gamma+2} - R \equiv \gamma M \\
r_1 b_2 + \gamma r_2 b_1 + \gamma^2 r_3 b_0 + \ldots + \gamma^{\gamma-2} r_{\gamma-1} b_{\gamma-\gamma+3} - R \equiv \gamma^2 M \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_1 b_{\gamma-2} + \gamma r_2 b_{\gamma-3} + \gamma^2 r_3 b_{\gamma-4} + \ldots + \gamma^{\gamma-2} r_{\gamma-1} b_{\gamma-\gamma} - R \equiv \gamma^{\gamma-2} M
\end{array}\right\} \pmod{\lambda},$$

où nous avons fait, pour abréger,

$$r_1 + \gamma r_2 + \gamma^2 r_3 + \ldots + \gamma^{\gamma-2} r_{\gamma-1} = R$$

Ces congruences, multipliées respectivement par $1, \gamma^{2n-1}, \gamma^{2(2n-1)}, \ldots, \gamma^{(\lambda-2)(2n-1)}$, et ajoutées, donnent une somme qu'on décompose aisément en deux facteurs

$$\left(\begin{array}{l} r_1 + \gamma^{2n} r_2 + \gamma^{4n} r_3 + \ldots \\ + \gamma^{2(\mu-1)n} r_{\mu-1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{l} b_0 + b_1 \gamma^{2n-1} + b_2 \gamma^{2(2n-1)} + \ldots \\ + b_{\lambda-2} \gamma^{(\lambda-2)(2n-1)} \end{array}\right) \equiv 0,$$

pour le module λ et pour les valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots, \mu - 1$. Il suit de cette congruence, que dans les cas où le second facteur

$$b_0 + b_1 \gamma^{2n-1} + b_2 \gamma^{2(2n-1)} + \ldots + b_{\lambda-2} \gamma^{(\lambda-2)(2n-1)}$$

n'est divisible par λ pour aucune des valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots, \mu - 1$, le premier facteur sera nécessairement congru à zéro pour toutes ces valeurs de n. Dans ce cas, on aura le système des congruences :

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + \gamma^2 r_2 + \gamma^4 r_3 + \ldots + \gamma^{2(\mu-2)} r_{\mu-1} \equiv 0, \\ r_1 + \gamma^4 r_2 + \gamma^8 r_3 + \ldots + \gamma^{4(\mu-2)} r_{\mu-1} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 + \gamma^{2(\mu-1)} r_2 + \gamma^{4(\mu-1)} r_3 + \ldots + \gamma^{(\mu-2)(\mu-1)} r_{\mu-1} \equiv 0, \end{array}\right\} \pmod{\lambda}.$$

Le déterminant de ce système de congruences linéaires n'est pas congru à zéro, car on sait qu'il est composé de facteurs de la forme $\gamma^{2k} - \gamma^{2h}$, où k et h sont différents entre eux et moindres que $\mu - 1$. Par cette raison, il n'y a pas d'autres valeurs des inconnues de ce système, que

$$r_1 \equiv 0, \quad r_2 \equiv 0, \quad r_3 \equiv 0, \ldots, \quad r_{\mu-1} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

et puisque ces exposants ne doivent pas être tous divisibles par λ, on en conclut que, dans le cas où

$$b_0 + b_1 \gamma^{2n-1} + b_2 \gamma^{2(2n-1)} + \ldots + b_{\lambda-2} \gamma^{(\lambda-2)(2n-1)}$$

n'est divisible par λ pour aucune des valeurs $n = 1, 2, 3, \ldots, \mu - 1$, le second facteur $\frac{D}{\Delta}$ du nombre des classes H ne sera pas divisible par λ. La condition

$$b_0 + b_1 \gamma^{2n-1} + b_2 \gamma^{2(2n-1)} + \ldots + b_{\lambda-2} \gamma^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

nécessaire pour que le facteur $\frac{D}{\Delta}$ soit divisible par λ, étant la même que nous avons trouvée comme condition nécessaire et suffisante pour que le premier facteur $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu}}$ soit divisible par λ, on voit que le second facteur du nombre des classes H ne sera jamais divisible par λ, à moins que le premier facteur ne le soit en même temps. Nous voilà donc arrivés au résultat suivant :

Pour que le nombre H *des classes diverses des nombres complexes idéaux soit divisible par* λ, *il faut et il suffit que le nombre premier* λ *soit facteur du numérateur d'un quelconque des* $\frac{\lambda-3}{2}$ *premiers nombres bernoulliens.*

Nous passons au second problème de ce paragraphe, qui consiste dans la recherche des valeurs du nombre premier λ pour lesquelles une unité complexe puisse être congrue à un nombre entier non complexe, sans être une puissance du degré λ.

Soit $E(\alpha)$ une unité complexe qui satisfasse à la condition

$$E(\alpha) \equiv c \pmod{\lambda},$$

où c est un entier non complexe. Cette unité, exprimée par le système des unités indépendantes

$$e(\alpha), \quad e(\alpha^{i}), \ldots, \quad e(\alpha^{i^{\mu-1}}),$$

prendra la forme

$$E(\alpha) = \alpha^{r} e(\alpha)^{\frac{r'}{n}} . e(\alpha^{i})^{\frac{r''}{n}} \ldots e(\alpha^{i^{\mu-1}})^{\frac{r^{(\mu-1)}}{n}},$$

où les exposants rationnels $\frac{r_1}{n}, \frac{r_2}{n}, \ldots, \frac{r_{\mu-1}}{n}$ sont réduits au même dénominateur le plus petit possible, en sorte qu'il n'y ait pas de facteur commun de tous les numérateurs avec le dénominateur n. En changeant α en α^{-1} dans la congruence posée, on a aussi

$$E(\alpha^{-1}) \equiv c \pmod{\lambda},$$

d'où

$$E(\alpha) \equiv E(\alpha^{-1}) \pmod{\lambda}.$$

et, par conséquent,

$$\alpha^{k} = \alpha^{k}, \quad \alpha^{k} - 1, \quad k \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

En substituant cette valeur de $\alpha^{k} - 1$, élevant à la puissance n et prenant $E(\alpha) \equiv c$, on aura

$$\equiv c^{n} \equiv e(\alpha)^{r} \cdot e(\alpha^{i})^{r_2} \ldots e(\alpha^{i^{\mu-1}})^{r_{\mu-1}} \pmod{\lambda}.$$

Voilà la même congruence que nous avons discutée dans la recherche précédente. Nous y avons trouvé qu'à l'exception des cas où λ se trouve comme facteur du numérateur d'un des $\frac{\lambda-3}{2}$ premiers nombres bernoulliens, cette congruence exige nécessairement que tous les exposants soient divisibles par λ. Alors $E(\alpha)^{n}$ sera égal à une puissance du degré λ; on pourra donc poser

$$E(\alpha)^{n} = F(\alpha)^{\lambda},$$

et comme tous les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{\mu-1}$ n'ont aucun facteur commun avec n, cet exposant n ne sera pas divisible par λ. Par cette raison, on pourra toujours trouver deux nombres entiers s et t, tels qu'on ait

$$ns - \lambda t = 1 \quad \text{ou} \quad ns = \lambda t + 1,$$

et, en élevant l'équation précédente à la puissance s, on aura

$$E(\alpha)^{ns} = E(\alpha)^{\lambda t + 1} = F(\alpha)^{\lambda s},$$

d'où, en divisant par $E(\alpha)^{\lambda t}$,

$$E(\alpha) = \left[\frac{F(\alpha)}{E(\alpha)^{t}}\right]^{\lambda}.$$

Ainsi $E(\alpha)$ est une $\lambda^{ième}$ puissance, et nous avons le théorème :

Si le nombre premier λ n'est contenu dans aucun des $\frac{\lambda-3}{2}$ premiers nombres bernoulliens comme facteur du numérateur, toute unité complexe, congrue à un nombre complexe pour le module λ, sera une $\lambda^{ième}$ puissance d'une autre unité complexe.

§ X.

Application à la démonstration du dernier théorème de Fermat.

Dans tout ce qui précède, la théorie des nombres complexes est avancée à un point où la démonstration du fameux théorème de Fermat se fait avec facilité pour toutes les puissances dont les exposants satisfont à la condition qui se trouve dans les théorèmes du paragraphe précédent : que le nombre λ ne soit pas contenu comme facteur dans un des premiers $\frac{\lambda-3}{2}$ nombres bernoulliens. Comme la démonstration pour les nombres complexes est aussi facile que pour les nombres entiers non complexes, nous supposerons que, dans l'équation

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0,$$

u, v, w soient des nombres complexes existants de la forme

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},$$

sans aucun facteur commun deux à deux. Nous supposerons aussi que λ soit un nombre premier qui ne se trouve pas comme facteur du numérateur d'un des $\frac{\lambda-3}{2}$ premiers nombres bernoulliens.

Cela posé, nous savons qu'en vertu d'un théorème du paragraphe précédent, le nombre H des classes des nombres complexes idéaux n'est pas divisible par λ. De plus, nous avons trouvé dans le § VI, qu'en supposant $f(\alpha)$ idéal, $f(\alpha)^\lambda$ ne pourra être existant à moins que λ et H n'aient un facteur commun différent de l'unité, ce qui n'a pas lieu. Donc, si λ est un nombre tel que nous l'avons supposé, *la $\lambda^{ième}$ puissance d'un nombre complexe idéal ne sera pas égale à un nombre complexe existant, et de ce que $f(\alpha)^\lambda$ est un nombre complexe existant, il suivra nécessairement que $f(\alpha)$ est un nombre existant.*

Rappelons encore expressément le théorème démontré à la fin du paragraphe précédent, que pour les valeurs de λ, que nous considérons ici, *chaque unité complexe qui est congrue à un nombre non complexe pour le module λ est égale à une $\lambda^{ième}$ puissance d'une autre unité.*

La démonstration de l'impossibilité de l'équation proposée consistera en deux parties distinctes, dont la première traitera le cas où aucun des trois nombres u, v, w n'est divisible par $1-\alpha$, l'autre le cas où un de ces nombres aura le facteur $1-\alpha$.

Soit donc proposée en premier lieu l'équation

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0,$$

dans laquelle aucun des trois nombres complexes u, v, w ne soit divisible par $1-\alpha$. Observons d'abord que les nombres u, v, w pourront être multipliés par des unités simples de la forme α^k sans que l'équation proposée change de forme. En posant donc $\alpha^k u$ au lieu de u, on pourra toujours déterminer le nombre k tel, que $\alpha^k u$ prenne la forme

$$a + (1-\alpha)^2 P,$$

dans laquelle a est un entier non complexe et P un entier complexe. En effet, le nombre complexe u, ordonné suivant les puissances $1-\alpha$, prendra la forme

$$u = A + A_1(1-\alpha) + A_2(1-\alpha)^2 + \ldots + A_{\lambda-2}(1-\alpha)^{\lambda-2};$$

de même, en prenant

$$\alpha = 1 - (1-\alpha),$$

on aura

$$\alpha^k = 1 - k(1-\alpha) + \frac{k(k-1)}{1.2}(1-\alpha)^2 - \ldots,$$

d'où, en multipliant et comprenant dans un seul tous les termes multipliés par $(1-\alpha)^2$,

$$\alpha^k u = A + (A_1 - Ak)(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 P.$$

Enfin, en prenant le nombre k tel qu'on ait

$$Ak \equiv A_1 \pmod{\lambda},$$

ce qui est toujours possible, puisque A n'est pas divisible par λ, on voit que $\alpha^k u$ prend la forme proposée. En opérant de même sur les

nombres v et w, on pourra mettre

$$u = a + (1 - \alpha)^2 P,$$

$$v = b + (1 - \alpha)^2 Q,$$

$$w = c + (1 - \alpha)^2 R,$$

où les nombres a, b, c ne sont pas divisibles par λ, à cause de la supposition que u, v, w ne sont pas divisibles par $1 - \alpha$.

Maintenant, en décomposant la forme $u^\lambda + v^\lambda$, on obtient l'équation

$$(u + v)(u + \alpha v)(u + \alpha^2 v)\ldots(u + \alpha^{\lambda - 1} v) = -w^\lambda,$$

et je dis que deux quelconques de ces facteurs sont premiers entre eux. En effet, si $u + \alpha^r v$ et $u + \alpha^s v$ avaient un facteur commun, il est clair que $(\alpha^r - \alpha^s) u$ et $(\alpha^r - \alpha^s) v$ auraient le même facteur commun, et comme u et v sont premiers entre eux et $\alpha^r - \alpha^s$, ou, ce qui est au fond le même, $1 - \alpha$ ne peut diviser un de ces facteurs sans diviser également le nombre w, on voit que ces facteurs sont premiers entre eux.

Cela étant, mettons à profit le théorème démontré à la fin du § V, que lorsqu'une puissance d'un nombre complexe est décomposée en facteurs premiers entre eux, ces facteurs doivent être séparément des puissances semblables multipliées par des unités complexes. Nous en concluons qu'on doit avoir généralement pour toutes les valeurs de $r = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1$,

$$u + \alpha^r v = \alpha^\rho E_r(\alpha) t_r^\lambda,$$

t_r étant un nombre complexe, facteur de w, et $\alpha^\rho E_r(\alpha)$ une unité complexe quelconque, dans laquelle $E_r(\alpha)$ soit égal à $E_r(\alpha^{-1})$. On se rappellera que toute unité complexe consiste de deux facteurs tels que nous venons de les établir. Dans cette équation, t_r^λ est donné comme nombre complexe existant; d'où nous concluons que t_r sera aussi un nombre existant; la $\lambda^{ième}$ puissance t_r^λ sera donc congrue à un nombre entier non complexe pour le module λ, et l'on aura la congruence

$$u + \alpha^r v \equiv \alpha^\rho E_r(\alpha) m \pmod{\lambda}.$$

En désignant par u', v', w' les nombres complexes réciproques de u, v, w, qu'on en déduit en changeant α en α^{-1}, on aura de même

$$u' + \alpha^{-r} v' \equiv \alpha^{-r} (E_r(\alpha) . m) \pmod{\lambda};$$

d'où, en éliminant $E_r(\alpha) . m$,

$$\alpha^{-r}(u + \alpha^r v) \equiv \alpha^r (u' + \alpha^{-r} v') \pmod{\lambda}$$

Cette congruence, prise par rapport au module $(1 - \alpha)^2$, diviseur du module λ, donne

$$\alpha^{-r}(a + \alpha^r b) \equiv \alpha^r (a' + \alpha^{-r} b') \pmod{1 - \alpha^2},$$

car on a, en vertu des expressions de u, v, w données ci-dessus,

$$u \equiv a, \quad v \equiv b, \quad u' \equiv a', \quad v' \equiv b' \pmod{1 - \alpha^2},$$

et, comme on a généralement

$$\alpha^h \equiv 1 - h(1 - \alpha) \pmod{1 - \alpha^2},$$

cette congruence donne

$$(a + b\rho) - \rho = b' \pmod{1 - \alpha^2}.$$

Or on sait qu'un nombre entier non complexe divisible par $1 - \alpha$ sera toujours divisible par λ; d'où il suit que deux entiers non complexes congrus pour le module $1 - \alpha$ seront aussi congrus pour le module λ. On aura donc

$$(a + b\rho) - \rho \equiv b' \pmod{\lambda},$$

ce qui fait voir que $a + b$ n'est pas divisible par λ. En déterminant le nombre k par la congruence

$$(a + b)k \equiv b' \pmod{\lambda},$$

on aura

$$\rho \equiv k \pmod{\lambda},$$

et, en substituant cette valeur de ρ dans la congruence plus générale, donnée ci-dessus, on obtient la congruence

$$\alpha^{-kr}(u + \alpha^r v) \equiv \alpha^{kr}(u' + \alpha^{-r} v') \pmod{\lambda},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de $r = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1$. Lors-

qu'on y prend $r = 0$, on trouve

$$u + v \equiv u' + v' \pmod{\lambda}.$$

et, puisque les lettres u, v, w, et en même temps les lettres u', v', w' peuvent être échangées entre elles, on aura aussi

$$\left.\begin{array}{l} u + w \equiv u' + w' \\ v + w \equiv v' + w' \end{array}\right\} \pmod{\lambda};$$

enfin, de ces trois congruences, on déduit les congruences plus simples

$$\left.\begin{array}{l} u \equiv u' \\ v \equiv v' \\ w \equiv w' \end{array}\right\} \pmod{\lambda}.$$

En substituant ces valeurs congrues de u, v, w, au lieu de u', v', w', on aura

$$\alpha^{h'}(u + \alpha' v) \equiv \alpha^{h'}(u + \alpha^{-r} v) \pmod{\lambda},$$

ou, ce qui est le même

$$\alpha^{h'} - \alpha^{h'}\,|u - [\alpha^{-h-1+r} - \alpha^{h-r+1}]\,v \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Maintenant, si l'on prend les deux valeurs déterminées $r = 1$ et $r = 2$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{h'} - \alpha^{h'}\,|u + [\alpha^{-h-1} - \alpha^{h-1}]\,v \equiv 0 \\ \alpha^{h'} - \alpha^{h'}\,|u + [\alpha^{-2h-1} - \alpha^{2h-1}]\,v \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{\lambda};$$

d'où, en multipliant la première par $\alpha^{-h} + \alpha^{h}$, soustrayant la seconde et divisant par v, qui est premier par rapport au module, on obtient la congruence

$$\alpha^{h'} - \alpha^{h'}\,|\alpha^{-h-1} - \alpha^{h-1}| - [\alpha^{-2h-1} - \alpha^{2h-1}] \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\alpha^{h'-1} - \alpha^{h'-1}\,|\alpha^{-h} - \alpha^{h-1}|\,(\alpha - 1) \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

Maintenant, si aucun de ces trois facteurs n'est égal à zéro, leur produit contient le facteur $1 - \alpha$ trois fois; mais, pour être divisible par λ, il fallait qu'il contînt ce facteur $(\lambda - 1)$ fois. Donc, excepté le

seul cas $\lambda = 3$, que nous excluons de notre discussion, cette congruence ne peut subsister, à moins que des deux facteurs $\alpha^{k-1} - \alpha^{-k+1}$ et $\alpha^{-k} - \alpha^{k-1}$, l'un ou l'autre soit égal à zéro, ce qui revient à

$$k = 1 \quad \text{ou} \quad 2k = 1 \pmod{\lambda}.$$

Le premier de ces deux cas ne peut avoir lieu; car, d'après la congruence $(a + b)k \equiv b$, il s'ensuivrait

$$a \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

ce qui est contre l'hypothèse. Le second cas $2k \equiv 1$ donne, en vertu de la même congruence,

$$a \equiv b \pmod{\lambda},$$

comme conséquence nécessaire de l'équation

$$u' + v' + w' = 0,$$

en supposant qu'aucun des trois nombres u, v, w ne soit divisible par $1 - \alpha$. En échangeant les nombres u, v, w, ce qui change les nombres a, b, c en même temps, on obtient

$$a \equiv c \quad \text{et} \quad b \equiv c \pmod{\lambda}.$$

Or, en développant la $\lambda^{ième}$ puissance du binôme

$$u = a + (1 - \alpha)^2 P,$$

et en négligeant tous les termes divisibles par λ, on obtient

$$u^\lambda \equiv a^\lambda \equiv a \pmod{\lambda}.$$

De la même manière, on aura aussi

$$\left.\begin{aligned} v' &\equiv b' \equiv b \\ w' &\equiv c' \equiv c \end{aligned}\right\} \pmod{\lambda};$$

et, en ajoutant,

$$u' + v' + w' \equiv a + b + c \pmod{\lambda}.$$

Il faut donc qu'on ait

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{\lambda};$$

et, comme ces trois nombres a, b, c sont congrus entre eux, on aura

enfin les congruences

$$3a \equiv 0, \quad 3b \equiv 0, \quad 3c \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

qui ne peuvent subsister que dans le seul cas $\lambda = 3$.

Donc l'équation proposée

$$u^\lambda + v^\lambda + w^\lambda = 0$$

ne peut être satisfaite par des nombres complexes u, v, w dont aucun n'a le facteur $1 - \alpha$.

Passons maintenant à la seconde partie de notre démonstration, dans laquelle nous supposons qu'un des trois nombres u, v, w soit divisible par $1 - \alpha$. Soit w ce nombre divisible par $1 - \alpha$, qui pourra contenir ce facteur plusieurs fois, et mettons $(1 - \alpha)^m w$ au lieu de w, en sorte que l'équation proposée soit

$$u^\lambda + v^\lambda + (1 - \alpha)^{m\lambda} w^\lambda = 0.$$

Mais nous préférons discuter l'équation plus générale

$$u^\lambda + v^\lambda = E(\alpha)(1 - \alpha)^{m\lambda} w^\lambda,$$

dans laquelle les nombres complexes u, v, w, premiers entre eux, ne sont pas divisibles par $1 - \alpha$, et où $E(\alpha)$ désigne une unité complexe quelconque.

En décomposant l'expression $u^\lambda + v^\lambda$, on a

$$(u + v)(u + \alpha v)(u + \alpha^2 v) \ldots (u + \alpha^{\lambda-1} v) = E(\alpha)(1 - \alpha)^{m\lambda} w^\lambda.$$

Ici les facteurs de ce produit ont tous le facteur commun $1 - \alpha$; car, en faisant, comme ci-dessus,

$$u = a + (1 - \alpha)^2 P,$$
$$v = b + (1 - \alpha)^2 Q,$$

on aura

$$u + \alpha^r v \equiv a + b + rb(1 - \alpha) \pmod{(1 - \alpha)^2};$$

et comme le facteur $u + \alpha^r v$ doit être divisible par $1 - \alpha$, pour une certaine valeur de r du moins, on voit que $a + b$ doit être divisible

par $1-\alpha$, et conséquemment par λ. Cette congruence devient donc

$$u+\alpha^r v \equiv -rb(1-\alpha) \quad [\text{mod. } (1-\alpha)^2];$$

d'où l'on voit que tous ces facteurs ont le facteur commun $1-\alpha$, et qu'ils ne le contiennent qu'une seule fois, excepté le cas de $r=0$, où l'on a

$$u+v \equiv 0 \quad [\text{mod. } (1-\alpha)^2].$$

Cela étant, il suit immédiatement de l'équation précédente, que $u+v$ contient $(m\lambda-\lambda+1)$ fois précisément le facteur $(1-\alpha)$; on pourra donc poser

$$u+v = (1-\alpha)^{m\lambda-\lambda+1}\cdot\zeta$$

et

$$u+\alpha^r v = (1-\alpha)\zeta_r,$$

et, en substituant ces expressions dans l'équation où $u^\lambda+v^\lambda$ est décomposé en λ facteurs, on aura

$$\zeta\cdot\zeta_1\cdot\zeta_2\cdots\zeta_{\lambda-1} = k\cdot\alpha\cdot w^\lambda.$$

Les nombres complexes $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\lambda-1}$ sont premiers entre eux; car tout facteur commun de φ_r et φ_s, ou de $u+\alpha^r v$ et $u+\alpha^s v$, diviserait également les nombres $(\alpha^r-\alpha^s)u$ et $(\alpha^r-\alpha^s)v$, dont le plus grand diviseur commun est $1-\alpha$. De là on conclut, par la même raison que dans la première partie de notre démonstration, que les facteurs $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\lambda-1}$, premiers entre eux, dont le produit est égal à une $\lambda^{ième}$ puissance multipliée par une unité, seront séparément des puissances du degré λ multipliées par des unités. Donc on peut poser

$$\zeta = c_0\cdot\alpha\cdot w_1^\lambda,$$

$$\zeta_r = c_r\cdot\alpha\cdot t_r^\lambda,$$

ce qui donne

$$u+v = c_0\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)^{m\lambda-\lambda+1}\cdot w_1^\lambda,$$

$$u+\alpha^r v = c_r\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot t_r^\lambda$$

pour toutes les valeurs de $r = 1, 2, 3, \ldots, (\lambda - 1)$. En changeant la valeur de r en s, on aura aussi

$$u + \alpha^s v = e_s(\alpha)(1 - \alpha^s) t'_s,$$

et, en éliminant u et v de ces trois équations, on trouve

$$t'_r - \frac{e_r(\alpha)}{e_s(\alpha)} t'_s = \frac{e_r(\alpha)(\alpha^s - \alpha^r)(1 - \alpha)}{e_s(\alpha)(1 - \alpha^r)(1 - \alpha^s)} (1 - \alpha)^{m-1} \cdot w'_1;$$

lorsqu'on y fait, pour abréger,

$$\frac{e_r(\alpha)}{e_s(\alpha)} = -\varepsilon(\alpha),$$

$$\frac{e_r(\alpha)(\alpha^s - \alpha^r)(1 - \alpha)}{e_s(\alpha)(1 - \alpha^r)(1 - \alpha^s)} = E_1(\alpha),$$

où $\varepsilon(\alpha)$ et $E_1(\alpha)$ sont aussi unités complexes, on aura

$$t'_r + \varepsilon(\alpha) t'_s = E_1(\alpha)(1 - \alpha)^{m-1} w'_1.$$

Les nombres complexes t_r, t_s et w_1, dont les $\lambda^{\text{ièmes}}$ puissances sont données comme nombres complexes existants, doivent être nombres existants eux-mêmes; les $\lambda^{\text{ièmes}}$ puissances de ces nombres existants seront donc congrues à des entiers non complexes pour le module λ, et l'on aura

$$t'_r \equiv k, \quad t'_s \equiv k' \pmod{\lambda},$$

et, comme la puissance $(1 - \alpha)^{(m-1)\lambda}$ est divisible par λ, si le nombre entier m est plus grand que l'unité, cette équation donne la congruence

$$k + \varepsilon(\alpha) k' \equiv 0 \pmod{\lambda}.$$

En déterminant le nombre c par la congruence

$$k + ck' \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

on aura

$$\varepsilon(\alpha) \equiv c \pmod{\lambda},$$

et l'unité $\varepsilon(\alpha)$, congrue à un nombre entier non complexe pour le module λ, doit être égale à une $\lambda^{\text{ième}}$ puissance d'une autre unité. Donc,

en posant

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_1(\alpha)^r, \quad \varepsilon_1(\alpha)t_s = v_1 \quad \text{et} \quad t_r = u_1,$$

l'équation précédente devient

$$u_1' + v_1' = E_1(\alpha)(1-\alpha)^{m-1}w_1.$$

Voilà une équation qui ne diffère de l'équation proposée, dont elle dérive, qu'en ce que le nombre m est diminué d'une unité. En appliquant la même méthode à la nouvelle équation, on obtiendra une équation entièrement semblable, dans laquelle le nombre m sera diminué de deux unités; et, en continuant cette réduction, on parviendra nécessairement à une équation semblable, dans laquelle m est réduit à la valeur $m = 1$. La même méthode de réduction, dans laquelle m était supposé plus grand que l'unité, n'est plus applicable à l'équation

$$u^\lambda + v^\lambda = E(\alpha)(1-\alpha)^\lambda w^\lambda,$$

mais il est facile de démontrer que cette équation ne peut jamais avoir lieu. Pour cela, il suffit de démontrer que *la forme $u^\lambda + v^\lambda$, étant divisible par $1-\alpha$, doit nécessairement contenir ce facteur $(\lambda+1)^{\text{e}}$ fois au moins.*

En effet, en prenant, comme ci-dessus,

$$u = a + (1-\alpha)^2 P, \quad v = b + (1-\alpha)^2 Q,$$

on aura

$$u + \alpha^r v \equiv a + b - rb(1-\alpha) \quad [\text{mod. } (1-\alpha)^2],$$

et comme, pour une certaine valeur de r, le facteur $u + \alpha^r v$ de la forme $v^\lambda + v^\lambda$ doit être divisible par $1-\alpha$, on aura nécessairement $a+b$ divisible par $1-\alpha$, et conséquemment divisible par λ, ce qui donne

$$u + \alpha^r v \equiv -rb(1-\alpha) \quad [\text{mod. } (1-\alpha)^2],$$

et, pour le cas $r = 0$,

$$u + v \equiv 0 \quad [\text{mod. } (1-\alpha)^2].$$

On voit donc que tous les facteurs du produit

$$u^\lambda + v^\lambda = (u+v).(u+\alpha v).(u+\alpha^2 v)\ldots(u+\alpha^{\lambda-1}v)$$

sont divisibles par $1-\alpha$, et que le premier facteur $u+v$ est divisible par $(1-\alpha)^2$. Ainsi le nombre des facteurs $1-\alpha$ contenus dans la forme $u^\lambda+v^\lambda$ sera égal à $\lambda+1$ au moins.

Il suit de là que l'équation

$$u^\lambda+v^\lambda=E(\alpha).(1-\alpha)^\lambda w^\lambda,$$

dans laquelle la forme $u^\lambda+v^\lambda$, divisible par $(1-\alpha)^\lambda$, n'est pas divisible par $(1-\alpha)^{\lambda+1}$, ne pourra jamais subsister, et nous en concluons que l'équation

$$u^\lambda+v^\lambda=E(\alpha).(1-\alpha)^{m\lambda}.w^\lambda$$

dont elle dérive est aussi impossible.

Le théorème de Fermat, en tant qu'il est rigoureusement démontré dans ce qui précède, pourra donc s'énoncer comme il suit :

Si λ est un nombre premier, qui n'est contenu dans aucun des $\frac{\lambda-3}{2}$ premiers nombres bernoulliens comme facteur du numérateur, l'équation

$$u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0$$

ne peut avoir lieu, ni pour des valeurs entières non complexes des nombres u, v, w, ni pour des valeurs complexes de ces nombres formées avec les racines de l'équation $\alpha^\lambda=1$.

D'après les valeurs calculées du premier facteur du nombre des classes H, que nous avons données à la fin du § VIII de ce Mémoire, dans la première centaine, il n'y a que les trois nombres premiers $\lambda=37$, $\lambda=59$ et $\lambda=67$, qui sont exceptés de notre démonstration, parce qu'ils se trouvent respectivement comme facteurs du seizième, du vingt-deuxième et du vingt-neuvième nombre bernoullien. Pour de telles puissances qui se présentent comme cas exceptionnels de notre démonstration, il reste encore à démontrer que le théorème de Fermat a lieu en vérité, ou à trouver les solutions de l'équation

$$u^\lambda+v^\lambda+w^\lambda=0.$$

Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure;

PAR M. J.-A. SERRET.

Dans un Mémoire publié au tome précédent de ce Recueil, M. Bertrand a démontré que les normales *principales* d'une courbe à double courbure donnée ne peuvent être les normales principales d'une autre courbe, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la courbe donnée. On démontre ce théorème d'une manière très-simple et très-élégante en faisant usage des formules que j'ai données dans un Mémoire qui fait partie du présent volume (page 193).

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de la courbe donnée; α, β, γ; λ, μ, ν; ξ, υ, ζ les angles formés avec les axes par la tangente, par l'axe du plan osculateur, et par la normale principale respectivement; ds la différentielle de l'arc de la courbe; ρ le rayon de la première courbure; et r le rayon de la deuxième courbure ou le rayon de torsion. On a (*voyez* le Mémoire cité plus haut)

$$(1)\qquad d\cos\alpha = \frac{ds}{\rho}\cos\xi,\quad d\cos\lambda = \frac{ds}{r}\cos\xi,\quad d\cos\xi = -\frac{ds}{\rho}\cos\alpha - \frac{ds}{r}\cos\lambda$$

Des formules semblables ont lieu à l'égard des deux autres axes coordonnés.

Cela posé, cherchons la condition pour que les normales principales de la courbe donnée soient aussi celles d'une autre courbe. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de cette deuxième courbe, ds_1 la différentielle de l'arc, et $d\omega$ l'angle de contingence. On doit avoir, a étant une constante,

$$(2)\qquad x_1 = x + a\cos\xi \qquad \text{et} \qquad (3)\qquad d\frac{dx}{ds_1} = \cos\xi\, d\omega$$

Différentiant l'équation (2), il vient, à cause de $dx = ds\cos\alpha$,

$$dx_1 = \left[\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\cos\alpha - \frac{a}{r}\cos\lambda\right] ds;$$

de cette équation et des deux autres semblables relatives aux axes des y et des z, on déduit

$$ds_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}}\, ds = \mathrm{R}\, ds;$$

on a, d'après cela,

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left[\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\cos\alpha - \frac{a}{r}\cos\lambda\right];$$

différentiant cette dernière équation et comparant le résultat avec l'équation (3), il vient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{1}{\rho} - a\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r}\right) - R\frac{d\omega}{ds}\right] ds \cos\xi - \left[a d\frac{1}{\rho} + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\frac{dR}{R}\right]\cos\alpha \\ &\qquad - \left(a d\frac{1}{r} - \frac{a}{r}\frac{dR}{R}\right)\cos\lambda = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que cette équation aura lieu encore si l'on remplace α, λ, ξ par β, μ, η ou par γ, ν, ζ respectivement; d'où il suit que les coefficients de $\cos\xi$, $\cos\alpha$, $\cos\lambda$ sont nuls. On a donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &d\omega = \left[\frac{1}{\rho} - a\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)\right]\frac{ds}{R}, \\ &a d\frac{1}{\rho} + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\frac{dR}{R} = 0, \\ &d\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{dR}{R} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations (5) sont le résultat de l'élimination de x_1, y_1, z_1, entre les équations (2), (3) et les quatre semblables relatives aux axes des y et des z. Les deux dernières ne contiennent que ρ et r, car

$$R = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a}{r^2}},$$

et elles conduisent au même résultat par l'intégration. On déduit de l'une ou de l'autre

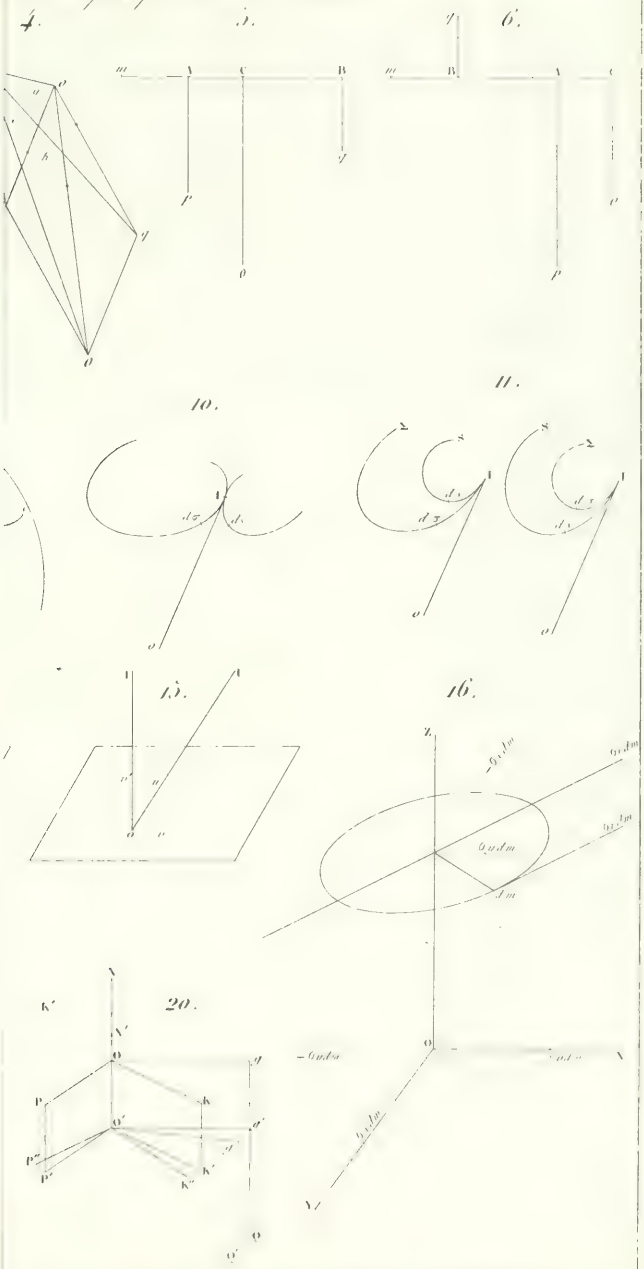
$$(6)\quad \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1,$$

b désignant la constante arbitraire. Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la courbe donnée pour que ses normales principales appartiennent à une autre courbe. Quant à la première des équations (5), elle fait connaître l'angle de contingence $d\omega$ de la seconde courbe.

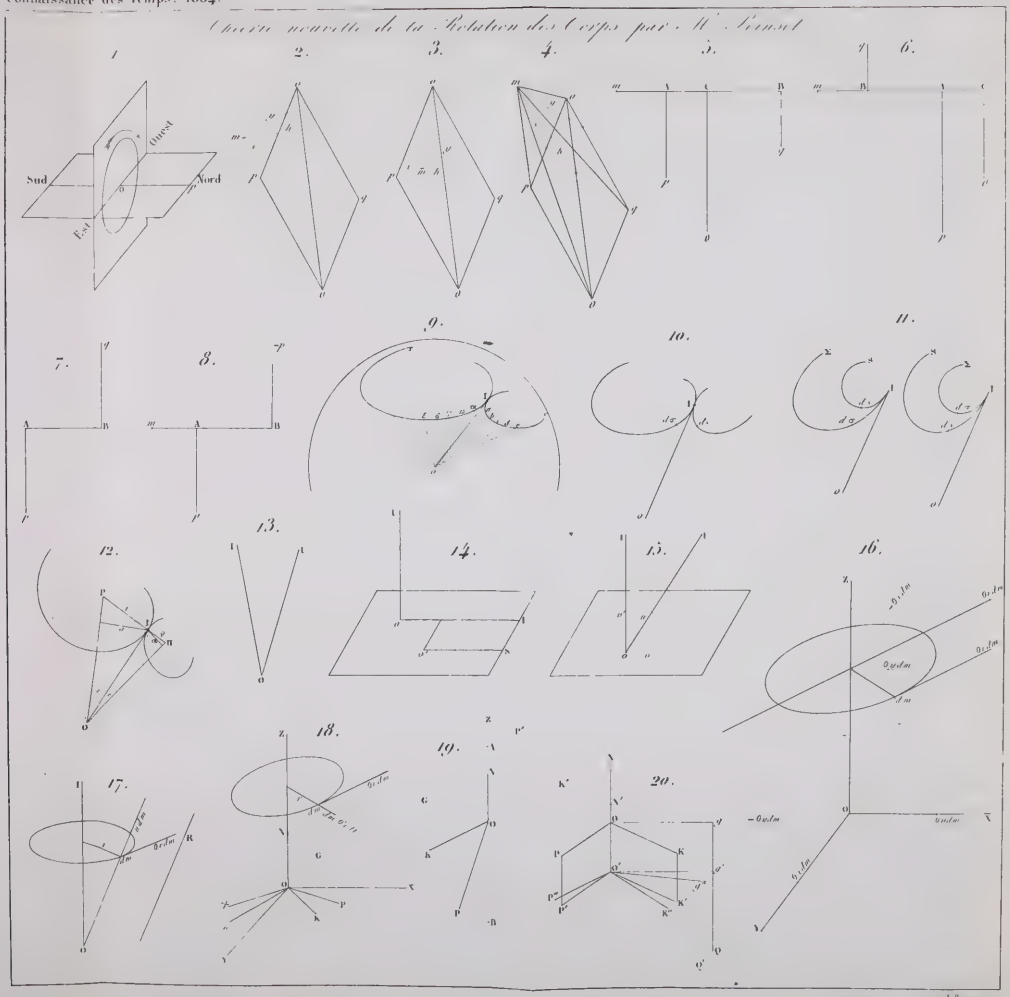
FIN DU SEIZIÈME VOLUME.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

des Corps par M. Lamé

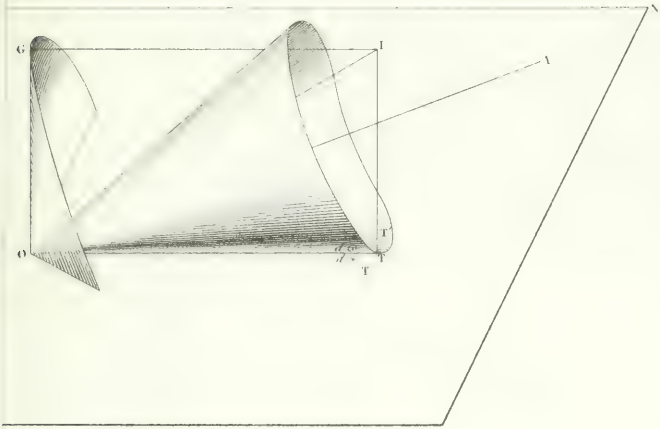


Théorie nouvelle de la Révolution des Corps par M. Poinsot

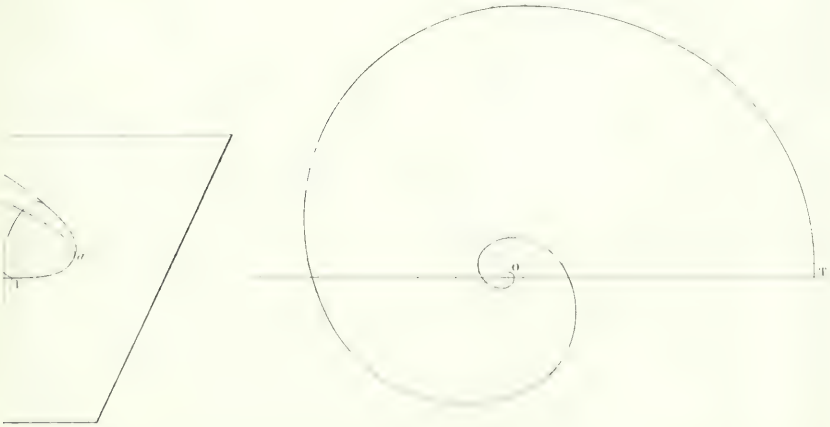


Ernest.

22. $h > b$.

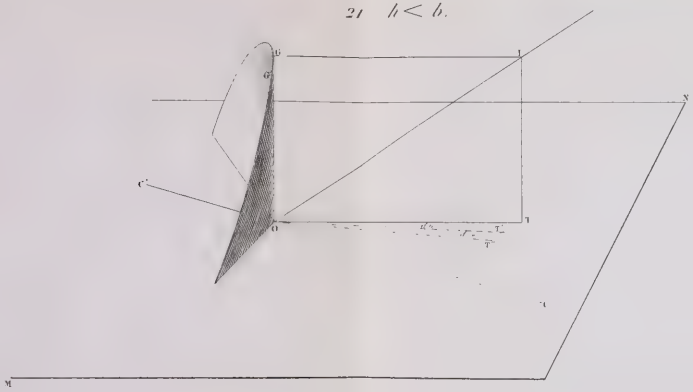


24. $h = b$.

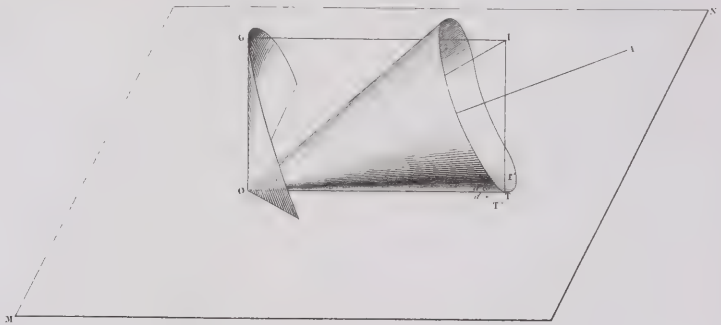


Théorie nouvelle de la rotation des Corps par M. Poinsot

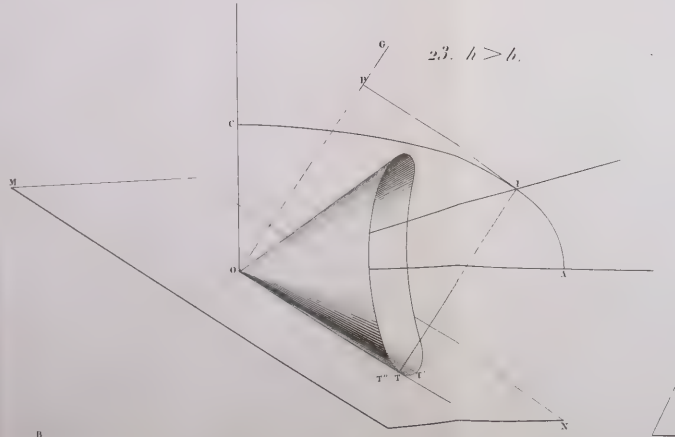
21. $h < b$.



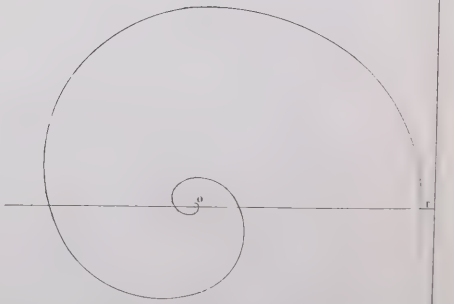
22. $h > b$.



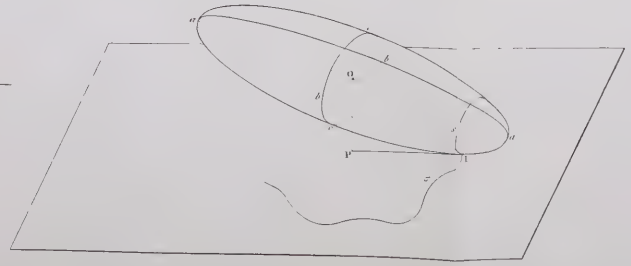
23. $h > b$.



24. $h = b$.



25.



Lith. imp. Lacquer 20 r. Vivienne

QA
1
J684
t.16
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY